

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ TLUMIČE RÁZŮ Z PLASTICKÝCH A HYPERELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

COMPUTATIONAL MODELS OF SHOCK ABSORBERS OF PLASTIC AND HYPERELASTIC  
MATERIALS

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

BC. MARTIN BURDÍK

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

DOC. ING. JIŘÍ BURŠA, PH.D.

BRNO 2009



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce.

V Brně 25. května 2009

podpis



## **Poděkování**

V první řadě bych rád poděkoval svému vedoucímu doc. Ing. Jiřímu Buršovi Ph.D za odborné vedení a za ochotu při konzultacích.

Firmě Cosis s.r.o. děkuji za možnost používat jejich výpočetních prostředků pro potřeby této práce.

Chtěl bych také poděkovat své přítelkyni a své rodině za podporu, bez které by tato práce nemohla vzniknout.

(autor)



## **Abstrakt**

Cílem předložené práce je vytvoření výpočtového modelu napěťově deformačního chování tlumičů rázů z hyperelastických a plastických materiálů. Prvním krokem je seznámení se z teorií velkých deformací, teoretickými poznatky o hyperelastických a plastických materiálech. Dalším krokem je seznámení se s možnostmi komerčních systémů MKP při řešení problému hyperelastických a plastických materiálů. Na základě zjištěných poznatků jsou vytvořeny modely jednoduchých tlumičů rázu a s těmito modely jsou simulovány rázové děje. Srovnání je provedeno na základě průběhů zrychlení tělesa, které do tělesa narazí z danou počáteční rychlostí.

## **Abstract**

An aim of the given thesis is creating of a computational model of strain-stress behaviour of shock absorbers made of plastic and hyperelastic material. First step is get ecquaint with theory of large strains, theory of hyperelasticity and plasticity. Next step is get ecquaint with options of commercial programs based on MKP. Based on this knowledge, models of simple shock absorber are made. With created models, crash tests are simulated and property of shock absorbers are compared.

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>10</b>
<b>2 Teorie velkých deformací</b>	<b>11</b>
2.1 Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa	12
2.2 Tenzory popisující napjatost v bodě tělesa	16
<b>3 Hyperelasticita, konstitutivní vztahy</b>	<b>18</b>
3.1 Hyperelasticita	18
3.2 Konstitutivní vztahy hyperelastických materiálů	19
3.2.1 Fenomenologické konstitutivní modely	19
3.2.2 Mikromechanické konstitutivní modely	21
<b>4 Plasticita</b>	<b>22</b>
4.1 Teorie plasticity	23
4.1.1 Deformační teorie plasticity	23
4.1.2 Inkrementální teorie plasticity	24
<b>5 Hyperelastické materiály v systémech MKP</b>	<b>27</b>
5.1.1 Jednoosá tahová a jednoosá tlaková zkouška	27
5.1.2 Dvouosá tahová a dvouosá tlaková zkouška	27
5.1.3 Zkouška smykem	28
5.1.4 Zkouška objemové stlačitelnosti	28
5.1.4 Rovnocennost jednoosé tlakové zkoušky rovnoměrné dvouosé zkoušky tahem	29
5.2 Modely hyperelastických materiálů v systému PAM-CRASH	29
5.2.1 Hyperelastic Mooney-Rivlin solid (material type 17)	29
5.2.2 Visco-elastic Ogden rubber for solid elements (material type 37)	31
5.2.3 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému PAM-CRASH	32
5.3 Modely hyperelastických materiálů v systému LS-DYNA	35
5.3.1 Mooney-Rivlin rubber (material type 27)	35
5.3.2 Hyperelastic rubber (material type 77)	36
5.3.3 Ogden rubber (material type 77)	36
5.3.4 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému LS-DYNA	37
5.4 Modely hyperelastických materiálů v systému ANSYS	40
5.4.1 Material nonlinear hyperelastic Mooney-Rivlin	40
5.4.2 Material nonlinear hyperelastic Ogden	40
5.4.3 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému ANSYS	41
<b>6 Plastické materiály v systémech MKP</b>	<b>44</b>
6.1 Plastické materiály v systému PAM-CRASH	44
6.1.1 Material elastic-plastic for solids (type 1)	44
6.1.2 Material elastic-plastic for shells (type 103)	44
6.2 Plastické materiály v systému LS-DYNA	45
6.2.1 Material PLASTIC_KINEMATIC (type3)	45
<b>7 Explicitní a implicitní algoritmus MKP</b>	<b>46</b>
7.1 Explicitní algoritmus MKP	46
7.2 Implicitní algoritmus MKP	46
<b>8 Vytvoření výpočtového modelu tlumiče rázu</b>	<b>48</b>



8.1	Struktura modelu	48
8.2	Výpočtové modely v systému PAM-CRASH	52
8.2.1	Výpočtový model hyperelastického tlumiče v systému PAM-CRASH	52
8.2.2	Výpočtový model plastického tlumiče v systému PAM-CRASH	54
8.2.3	Výpočtový model tlumiče s kombinace dvou materiálů v PAM-CRASH	56
8.2.4	Srovnání chování jednotlivých modelů tlumičů v systému PAM-CRASH	58
8.3	Výpočtové modely v systému LS-DYNA	62
8.3.1	Výpočtový model hyperelastického tlumiče v systému LS-DYNA	62
8.3.2	Výpočtový model plastického tlumiče v systému LS-DYNA	64
8.3.3	Výpočtový model tlumiče s kombinace dvou materiálů v systému LS-DYNA	66
8.3.4	Srovnání chování jednotlivých modelů tlumičů v systému LS-DYNA	68
8.4	Porovnání výsledků při modelování v programech PAM-CRASH a LS-DYNA	69
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>72</b>

## 1 Úvod

Výpočtové modelování rázových dějů se stává součástí procesu vývoje u stále více výrobků. Důvodem pak může být snižování nákladů na experimentální zkoumání nebo také nerealizovatelnost experimentu při snaze vyvinout produkt odolnější, bezpečnější a tím více konkurenceschopnější. Od výpočtového modelování drop testů drobné spotřební elektroniky po simulace crash-tesů dopravních prostředků mají tyto simulace společné vlastnosti. Vždy se jedná o rychlý náraz tělesa do tuhé bariéry. Vyhodnocovanou veličinou pak často bývá zrychlení některé z částí pohybujícího se tělesa, které v závislosti na vyhodnocované situaci může při určité hodnotě způsobit vznik mezního stavu. Ať už jsou to body, které představují přetížením poškoditelné orgány lidského těla, strojní součásti zařízení nebo prvky elektroniky, snahou bývá snížit sílu vzniklou vlivem zrychlení na únosnou mez tak aby nevnikl mazní stav. Jedním z možných řešení je použití materiálů, které jsou schopny velkých deformací. Ty jsou díky tomu schopny rozložit silové působení potřebné k zastavení objektu při rázu na delší časový interval. Dojde tak ke snížení maximální velikosti působící síly. Toho jsou schopny například materiály hyperelastické, které se pro tuto svou vlastnost k těmto účelům používají. Takovéto materiály jsou schopny zmíněnou funkci plnit opakovaně. V praxi se často také řeší případy, kdy se nevyžaduje opakována funkce tlumení rázu. Důraz může být kladen například na dobré mechanické vlastnosti materiálů při zachování schopnosti tlumení alespoň jednoho rázu. Pro tyto účely se často používají materiály plastické, popřípadě pružně plastické. A právě rychlými dynamickými ději hyperelastických a plastických materiálů se bude zabývat tato práce.

## 2 Teorie velkých deformací

Napjatost v bodě tělesa je jednoznačně popsána tenzorem napětí  $\mathbf{T}_\sigma$  a stav deformace v bodě tělesa je jednoznačně popsán tenzorem přetvoření  $\mathbf{T}_\varepsilon$ . V obecných souřadnicových systémech jsou tyto tenzory popsány maticemi velikosti 3\*3. Kde u tenzoru napětí diagonální prvky představují normálová napětí a nediagonální představují smyková napětí. U tenzoru přetvoření prvky na diagonále představují délková protažení do jednotlivých směrů a nediagonální prvky představují poloviční hodnoty úhlových přetvoření. Oba tyto tenzory je možné, často však nezbytně nutné rozložit do dvou tenzorů a pomocí těchto pak odděleně popsat tvarovou a objemovou složku napětí, resp. deformace.

Potom tenzor, který souvisí se změnou tvaru, je tzv. deviátor tenzoru napětí, resp. přetvoření označovaný jako  $\mathbf{T}_{\sigma D}$ , resp.  $\mathbf{T}_{\varepsilon D}$ . Tenzor, který souvisí se změnou objemu tělesa se nazývá kulový tenzor napětí a tento se označuje jako  $\mathbf{T}_{\sigma V}$ , resp.  $\mathbf{T}_{\varepsilon V}$ . Samotný postup rozkladu tenzoru  $\mathbf{T}_\sigma$  a  $\mathbf{T}_\varepsilon$  na kulový tenzor a deviátor je následující:

Pro tenzor napětí platí:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Kde  $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$  je tenzor napětí  $\mathbf{T}_\sigma$

$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{bmatrix}$  je deviátor tenzoru napětí  $\mathbf{T}_{\sigma D}$

$\begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix}$  je kulový tenzor napětí

Obdobně i pro tenzor přetvoření platí:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{Kde } \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \text{ je tenzor přetvoření } \mathbf{T}_\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{bmatrix} \text{ je deviator tenzoru přetvoření } \mathbf{T}_{\varepsilon D}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} \text{ je kulový tenzor přetvoření } \mathbf{T}_{\varepsilon V}.$$

$$\sigma_s = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_s = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{3} \quad (2.4)$$

## 2.1 Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa

Tenzor používaný v oblasti malých deformací, tzv. tenzor smluvních přetvoření je vztažen k původní nedeformované konfiguraci. V oblasti velkých deformací, kdy jsou rozměry podstatně odlišné od rozměrů původní konfigurace je potřeba tuto skutečnost respektovat. Za tímto účelem byly zavedeny různé definice tenzorů. Z nich nejrozšířenější budou uvedeny v následujícím textu. Budou zde uvedeny jen výsledné vztahy, jejich odvození je možné najít v literatuře, ze které bylo při psaní této kapitoly čerpáno [1, 10, 11].

### 1 Tenzor smluvních přetvoření

Jak již bylo řečeno výše, tento tenzor je použitelný jen k popisu stavu deformace v bodě za předpokladu malých deformací (do 1% deformace). Je tedy zřejmé, že je nepoužitelný pro potřeby této práce a v této kapitole je uveden jen pro názorné demonstraci rozdílu a zvýraznění hlavních myšlenek teorie velkých deformací.

Složky tenzoru smluvních přetvoření jsou pak

Pro délková protažení

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (2.5a)$$

Pro úhlová přetvoření

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5b)$$

Obecně pak pro prvek tohoto tenzoru s využitím Einsteinova sumačního pravidla platí vztah

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5c)$$

## 2 Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření

Tento tenzor je svázán s Lagrangeovským popisem kontinua. Tento je typický pro popis pohybu tvárných těles, kdy je v čase sledována trajektorie jednotlivých materiálových bodů, přiřazených počáteční konfiguraci v počátečním čase. Jednoduchým způsobem tak lze průběžně sledovat napěťově deformačně napěťovou historii v každém bodě kontinua, která je nezbytná pro adekvátní popis chování materiálů u mnoha typů konstitutivních vztahů [11]. Pro diagonální prvky tenzoru deformace platí:

$$\begin{aligned} E_x^L &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_y^L &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_z^L &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.6a)$$

Obecně pak pro prvek tohoto tenzoru s využitím Einsteinova sumačního pravidla platí vztah

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.6b)$$

Přetvoření je vztaženo k původním rozměrům, je však respektováno natočení elementu.

## 3 Almansi-Hamelův tenzor konečných přetvoření

Tento tenzor je svázán s Eulerovským přístupem.

Jeho diagonální prvky jsou popsány vztahy:

$$\begin{aligned} E_x^L &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_y^L &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_z^L &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.7a)$$

Obecně pak pro prvek tohoto tenzoru s využitím Einsteinova sumačního pravidla platí vztah

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.7b)$$

Změny délek jsou vztaženy ke konečným hodnotám délek, aktuální hodnoty však můžou ještě být v průběhu odlišné

#### 4 Tenzor deformačního gradientu

Vyjadřuje transformaci mezi aktuální a výchozí geometrickou konfigurací. Fyzikální význam jeho složek jsou poměrná protažení.

Pro diagonální prvky platí:

$$\lambda_x = \frac{\partial x}{\partial X}, \lambda_y = \frac{\partial y}{\partial Y}, \lambda_z = \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (2.8a)$$

Obecně pak pro všechny prvky platí

$$\lambda_{ij} = \partial x_i / \partial X_j \quad (2.8b)$$

Úplný maticový zápis tenzoru  $\mathbf{F}$ , tedy tenzoru deformačního gradientu v obecném souřadném systému pak má následující tvar:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.8c)$$

Kde determinant matice popisující tenzor deformačního gradientu je tzv. třetí invariant tenzoru deformačního gradientu. Tento je pro hlavní směry přetvoření dán vztahem

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.8d)$$

Tento třetí invariant tenzoru  $\mathbf{F}$  udává poměrnou objemovou změnu elementu.

Podobně jako u tenzoru napětí  $\mathbf{T}_\sigma$  a tenzor přetvoření  $\mathbf{T}_\varepsilon$  je možné i tenzor deformačního gradientu rozložit na kulovou část a deviátorovou část. Rozklad je pak následující.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_s & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 - \lambda_s & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 - \lambda_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{bmatrix} \quad (2.8e)$$

Kde  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 \end{bmatrix}$  je tenzor deformačního gradientu,

$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_s & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 - \lambda_s & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 - \lambda_s \end{bmatrix}$  je diviátor  $\mathbf{F}_D$  tenzoru  $\mathbf{F}$  a

$\begin{bmatrix} \lambda_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}$  je kulový tenzor  $\mathbf{F}_V$  deformačního gradientu.

Střední protažení je dáno vztahem:

$$\lambda_s = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \sqrt[3]{J} \quad (2.8f)$$

## 5 Couchy-Greenův tenzor deformace

Tento tenzor vychází podobně jako tenzor deformačního gradientu s poměrných protažení.

Pomocí tohoto tenzoru  $\mathbf{F}$  ho lze vyjádřit následovně

Pravý Couchy-Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{F}^T * \mathbf{F} \quad (2.9a)$$

$$C_{ij} = F_{ik} * F_{kj} \quad (2.9b)$$

Levý Couchy-Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{F} * \mathbf{F}^T \quad (2.9c)$$

$$C_{ij} = F_{ik} * F_{kj} \quad (2.9d)$$

Hlavními souřadnicemi tohoto tenzoru jsou tedy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.9e)$$

Invarianty Couchy-Greenova tenzoru pak lze v hlavním souřadném systému vyjádřit následovně:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.10a)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (2.10b)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (2.10c)$$

Kde  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu. Je tedy zřejmé, že také třetí invariant Couch-Greenova tenzoru deformace vyjadřuje změnu objemu.

V konstitutivních vztazích, o kterých bude pojednáno níže se vyskytují také tzv. modifikované invarianty Cochy-Greenova tenzoru deformace. Tyto jsou vztaženy pouze k tvarové složce tenzoru deformace. Pro tyto modifikované invarianty platí:

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-\frac{1}{3}} \quad (2.10d)$$

$$\bar{I}_2 = I_2 J^{-\frac{1}{3}} \quad (2.10e)$$

## 6 Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných přetvoření

Tento tenzor vztahuje přírůstek délky k aktuální délce v daném stadiu zatěžovacího procesu.

Pro hlavní směry přetvoření pak je možno Couchyho tenzor psát ve tvaru

$$E^C = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

## 2.2 Tenzory popisující napjatost v bodě tělesa

Obdobně jako tomu bylo u tenzoru popisující stav deformace v bodě tělesa při velkých deformacích se i pro popis napjatostí v bodě tělesa zavádí různé tenzory napětí. Tyto tenzory se od sebe liší především způsobem, jakým je vyjádřeno napětí vzhledem k vztažné ploše. Tímto je myšleno, podobně jako tomu bylo u tenzorů deformace na podstatné změny počáteční geometrické konfigurace. Uvedené tenzory však není možné používat libovolně. Je třeba používat jen tenzory, které jsou tzv. energeticky konjugované.

### Energeticky konjugované tenzory

O tenzorech napětí a přetvoření říkáme, že jsou energeticky konjugované (sdružené), jestliže jejich skalární součin integrovaný přes odpovídající přes vztažnou geometrickou konfiguraci dává práci vnitřních sil.[10]

### 1 Couchyho tenzor napětí

Tento tenzor zavádí napětí jako sílu vztaženou na skutečnou (aktuální) plochu. Z tohoto důvodu se o tomto napětí často mluví jako o skutečném napětí. Pro jednotlivé prvky tohoto tenzoru pak obecně platí následující vztah

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{ds_j} \quad (2.12)$$

Kde  $dF_i$  je elementární síla a  $ds_j$  je skutečná plocha v aktuální geometrické konfiguraci.

Tento tenzor je energeticky konjugovaný s Almansiho tenzorem přetvoření.



## 2 První Piola-Kirchhoffův tenzor napjetí

Tento tenzor zavádí napjetí jako sílu vztaženou k ploše v počáteční geometrické konfiguraci. O tomto tenzoru se často mluví jako o tenzoru smluvních napětí, často používaných např. u klasických tahových zkoušek. Pro prvky tohoto tenzoru platí vztah

$$\tau_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j} \quad (2.13)$$

Kde  $dF_i$  je elementární síla a  $dS_j$  plocha v původní geometrické konfiguraci.

Tento tenzor je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem deformace.

## 3 Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

První Piola-Kirchhoffův tenzor není symetrický. Tato skutečnost komplikuje jeho praktické využití. V praxi se častěji používá druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, který je i pro velká přetvoření symetrický. Tento tenzor nemá konkrétní fyzikální význam, v podstatě představuje fiktivní elementární sílu vztaženou k počáteční geometrické konfiguraci plochy. Fiktivní síla se přepočítává ze síly skutečné pomocí deformačního gradientu. Pro tuto sílu obecně platí

$$dF_{0i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dF_j \quad (2.14)$$

Pro prvky druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru pak platí

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j dX_k} \quad (2.15)$$

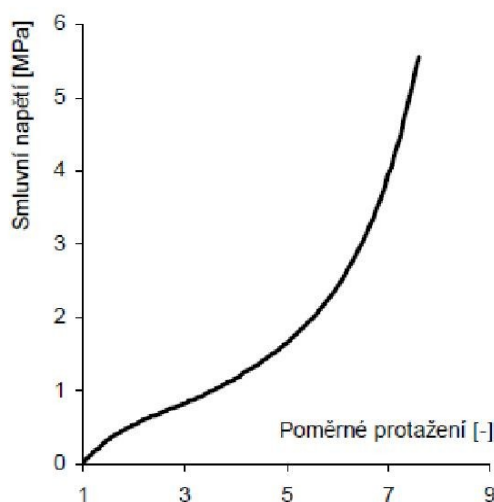
Kde  $dF_{0i}$  je fiktivní síla,  $dX_j dX_k$  je plocha v počáteční geometrické konfiguraci.

Tento tenzor je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem deformace.

### 3 Hyperelasticita, konstitutivní vztahy

#### 3.1 Hyperelasticita

Pro určitou skupinu materiálů je charakteristickou vlastností, že na zatížení poměrně malým napětím reagují poměrně velkou změnou tvaru a rozměrů. Tato změna může být řadu desítek, často však i stovek procent původních rozměrů. Podstatnou vlastností těchto materiálů dále je schopnost, rychle se vrátit k původnímu tvaru a k původním rozměrům a to hned po odlehčení. Pokud materiál má obě tyto vlastnosti, jedná se pak o materiál hyperelastický. Příklad deformačně-napěťové charakteristiky takového materiálu je na obrázku 3.1. informace při tvorbě této kapitoly byly čerpány z [1, 2, 11]



Obrázek 3.1 příklad napěťové deformační charakteristiky hyperelastického materiálu [2]

#### Definice hyperelastického materiálu

*Materiál nazýváme hyperelastickým, pokud existuje elastická potenciální funkce  $W$ , která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření, resp. deformace a jejíž derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí. [10]*

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (3.1)$$

$S_{ij}$  - jsou složky 2. Piola-Kirchhofova tenzoru napětí

$W$  - je funkce měrné energie napjatosti na jednotku nedeformovaného objemu

$E_{ij}$  - Jsou složky Green-Lagrangeova tenzoru přetvoření

#### 3.2 Konstitutivní vztahy hyperelastických materiálů

Při popisu napěťové deformační odezvy hyperelastických materiálů, především pak při jejím výpočtovém modelování se používají tzv. modely konstitutivních vztahů, Pro tyto bude dále používáno zkráceného názvu konstitutivní modely. Pro popis hyperelastických

materiálů, za předpokladu, že tyto materiály jsou dále izotropní a nestlačitelné běžně používají konstitutivní modely formulovány ve tvaru

$$W = f(I_1, I_2, \{M\}) \quad \text{nebo} \quad W = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \{M\}) \quad (3.2)$$

Kde  $I_i$  jsou invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $\lambda_i$  jsou hlavní protažení a  $\{M\}$  je obecně množina materiálových parametrů.

Konstitutivní modely formulované ve tvaru (3.2) se pak od sebe liší tvarem funkce  $f$ . Bylo navrženo velké množství těchto modelů. Některé byly navrženy na základě pozorování napětově-deformačních charakteristik tak, aby model co nejlépe aproximoval pozorovanou charakteristiku (např. modely Mooney-Rivlin, Ogden, Polynomial). Tyto jsou označovány jako Fenomenologické a jejich parametry z pravidla nemají konkrétní fyzikální význam. Jiné modely byly navrženy na základě poznatků o mikromechanických vlastnostech struktury materiálu. Parametry těchto modelů často mají fyzikální význam.

### 3.2.1 Fenomenologické konstitutivní modely

Tyto modely byly navrženy na základě pozorování napětově-deformačního chování hyperelastických materiálu na makroskopickém měřítku. Snahou bylo co nejlépe aproximovat charakteristické vlastnosti. I v této skupině byla navržena celá řada modelů, ze kterých autor zvolil tři zástupce, o kterých bude podrobněji pojednáno níže.

#### Model Mooney-Rivlin

Tento model se používá jako 2-parametrický, 5-parametrický nebo 9-parametrický. S tím že počet parametrů závisí na řádu polynomu kterým se aproximuje energie napjatosti.

##### Mooney-Rivlin 2-parametrický

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (3.5)$$

Tento model není schopen popsat případnou inflexi křivky popisující deformačně-napětovou charakteristiku. Tento model je obecně doporučeno používat do 100% deformace při jednoosém tahovém namáhání.

##### Mooney-Rivlin 5-parametrický

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (3.6)$$

Tento model je schopen popsat inflexi křivky přetvoření-napětí.

### Mooney-Rivlin 9-parametrický

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + C_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (3.7)$$

Tento model je schopen aproximovat i komplikované tvry deformačně napěťové křivky.

Kde v těchto vztazích  $C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{02}, C_{20}, C_{12}, C_{21}, C_{30}, C_{03}$  jsou materiálové parametry,  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  jsou modifikované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $d$  je parametr nestlačitelnosti a  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Zobecněním výše uvedených modelů Mooney-Rivlin je tzv. „model polynomický“

### **Polynomický model**

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = \sum_{i+j=1}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^M \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k} \quad (3.8)$$

Kde  $c_{ij}$  a  $d_k$  jsou materiálové parametry,  $\bar{I}_1$  a  $\bar{I}_2$  jsou modifikované invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace a  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu

Jak již bylo řečeno, tento model je zobecněním modelu Mooney-Rivlin, tyto lze dostat pro  $M=1$  a  $N=1$  resp.  $N=2$  resp.  $N=3$ .

### **Model Ogden**

Tento model zavádí energii napjatosti ve tvaru

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i} \quad (3.9)$$

Kde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  jsou složky levého Cauchy-Greenova tenzoru deformace,  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  a  $d_i$  jsou materiálové parametry a  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Tento model je schopen věrohodně popsat komplikované průběhy deformačně napěťových charakteristik a to včetně jejich vyztužení. Uvádí se, že model je použitelný až do 700% přetvoření při jednoosém tahovém namáhání

### 3.2.2 Mikromechanické konstitutivní modely

#### Model „Neo Hooke“

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru [2, 10]

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (3.3)$$

kde  $G$  je počáteční modul pružnosti ve smyku,  $\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace a  $d$  je parametr nestlačitelnosti materiálu daný vztahem  $d = \frac{K}{2}$ , kde  $K$  je objemový modul pružnosti.

Tento model patří mezi nejstarší a formulačně nejjednodušší. Vzhledem k tomu, že tvarová změna je popsána jen jednou materiálovou konstantou, tento model je použitelný pro přetvoření do cca 40-50% při jednoosém tahovém namáhání, kdy nelinearita není příliš vysoká. Model není schopen popsat vyztužení materiálu při větších přetvořeních

#### Model „Arruda-Boyce“

Tento model zavádí měrnou energii napjatosti ve tvaru [11]

$$W = G \left[ \frac{1}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_L^2} (\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_L^4} (\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_L^6} (\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_L^8} (\bar{I}_1^5 - 243) + \frac{1}{2} d (J - 12 - \ln J) \right] \quad (3.4)$$

kde  $G$  je podobně jako u modelu Neo-Hooke počáteční modul pružnosti ve smyku,  $\lambda_L$  = mezní protažení strukturních řetězců,  $d$  je parametr nestlačitelnosti,  $d = \frac{2}{K}$  kde  $K$  je objemový modul pružnosti.  $\bar{I}_1$  je modifikovaný první invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace a  $J$  je třetí invariant tenzoru deformačního gradientu.

Tento model vychází z modelu mikrostruktury elastomeru kde se při vyjadřování energie napjatosti bere ohled na protažení strukturních řetězců. U tohoto konkrétního modelu se předpokládá model s osmi strukturními řetězci, proto se model také někdy označuje jako „Osmiřetězcový“.

*Poznámka autora ke kapitole 3.2.1*

*Modelů těchto typů, tedy založených na mikromechanických vlastnostech struktury byla autory již navržena celá řada. Ale vzhledem k tomu, že v této práci nebudou použity, autor této práce nepovažuje za nutné dále se jimi zabývat.*

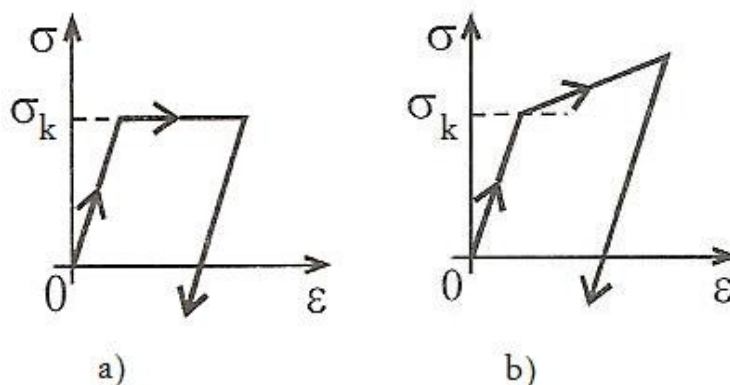
## 4 Plasticita

V kapitole číslo 3 bylo pojednáno o ideálně elastických, přesněji o hyperelastických materiálech. Tyto vykazovaly schopnost vrátit se do původních tvarů a rozměrů tělesa po odlehčení, tedy docházelo jen k vratným deformacím. V případě, že materiál není schopen vrátit se po odlehčení do původního tvaru a k původním rozměrům, deformace se skládá s vratné a trvalé složky. Kde vratná složka zaniká po odlehčení a trvalá přetrvává. Takovýto materiál se pak nazývá elasticko-plastický. Teoretický případ materiálu, kde vznikají jen trvalé deformace, bez elastické složky, se označuje za ideálně tuho-plastický popř. ideálně plasticko-tuhý. V této práci bude při výpočtech použito výhradně modelů materiálu s elasticko-plastickou odezvou. O tomto typu bude pojednáno v této kapitole. Při psaní této kapitoly bylo čerpáno z lit [1, 11, 12]

### Elasticko-plastické látky

„Do této skupiny jsou zařazeny látky, jejichž chování je do určité mezní hodnoty napětí elastické, po jeho dosažení se chování mění na plastické. Zatímco elastické chování se téměř vždy modeluje jako lineární, plastické chování se modeluje buď jako ideální, tedy bez zpevnění nebo se zpevněním, obvykle lineárním. [1]

Respektování různého plastického chování vede na různé modely, konkrétně na model ideálně elasticko-plastické látky a na modely s lineárním nebo multilineárním zpevněním“ [1]



Obrázek 3.2a) napětíově-deformační charakteristika ideálně elasticko-plastické látky

Obrázek 3.2 b) napětíově-deformační charakteristika elasticko-plastické látky se zpevněním

### Mezní stav pružnosti

Vymezení:

*Mezní stav pružnosti (počátku plasticity) je takový stav tělesa, při jehož dosažení vznikne v bodě tělesa smluvně stanovená hodnota plastické deformace.*

Kritérium, která tento mezní stav popisuje je tzv. podmínka plasticity. O této bude podrobněji pojednáno v kapitole 4.1.2.

## 4.1 Teorie plasticity

Vzhledem k tomu, že napjatost a deformace jsou u elasticko-plastických látek závislé na historii zatěžování, není možné zformulovat obecný zákon plasticity, který by objektivně popisoval deformačně-napěťové chování elasticko-plastických materiálů pomocí analytických vztahů. Jsou však již formulovány vztahy, které popisují závislost přírůstku napětí na přírůstku deformace. O tomto pojednává tzv. Inkrementální teorie plastického tečení, někdy též označována jako přírůstková. Dále existuje i jednodušší, tzv. Deformační teorie plasticity, někdy také označována jako Teorie malých pružně-plastických deformací. Tato teorie poskytuje finitní vztahy typu  $\sigma = f(\varepsilon)$ . [12]

Obě tyto teorie lze zapsat pomocí rovnice

$$H * T_{\sigma D} + K * \dot{T}_{\sigma D} = M * T_{\varepsilon D} + L * \dot{T}_{\varepsilon D} \quad (4.1)$$

kde  $H, K, M, L$  jsou funkce,  $T_{\sigma D}$  je deviátor tenzoru napětí (viz kapitola 2.3),  $\dot{T}_{\sigma D}$  je rychlost změny deviátoru napětí,  $T_{\varepsilon D}$  je deviátor tenzoru přetvoření (viz kapitola 2.3) a  $\dot{T}_{\varepsilon D}$  je rychlost změny deviátoru tenzoru přetvoření.

### 4.1.1 Deformační teorie plasticity

Tato teorie poskytuje vzájemně jednoznačné vztahy mezi konečnými hodnotami složek tenzoru napětí a tenzoru přetvoření bez ohledu na historii zatěžování. Představuje tedy jednodušší výpočtový model plastického chování, použitelný zejména v případech monotónního proporcionálního zatěžování.

Kde pod pojmy:

- monotónní zatěžování je chápáno jednosměrné, necyklické zatěžování
- proporcionální zatěžování je chápáno zatěžování, kdy všechny zatěžovací účinky rostou úměrně jednomu parametru

Deformační teorie plasticity vychází ze čtyř základních vět

**1) Směrový tenzor napětí je roven směrovému tenzoru přetvoření**

$$\overline{T_{\sigma D}} = \overline{T_{\varepsilon D}} \quad (4.2)$$

kde  $\overline{T_{\sigma D}}$  je směrový tenzor napětí a  $\overline{T_{\varepsilon D}}$  je směrový tenzor přetvoření.

Pro tyto dále platí:

$$\overline{T_{\sigma D}} = \frac{T_{\sigma D}}{\sqrt{I_2(T_{\sigma D})}} \quad (4.3)$$

$$\overline{T_{\varepsilon D}} = \frac{T_{\varepsilon D}}{\sqrt{I_2(T_{\varepsilon D})}} \quad (4.4)$$

Kde  $T_{\sigma D}$  a  $T_{\varepsilon D}$  jsou deviátory tenzorů napětí resp. přetvoření (kapitola 2.1),  $I_2(T_{\sigma D})$  a  $I_2(T_{\varepsilon D})$  jsou jejich druhé invarianty.

**2) Druhý invariant deviátoru tenzoru napětí je funkcí druhého invariantu deviátoru tenzoru přetvoření**

$$I_2(T_{\sigma D}) = f(I_2(T_{\varepsilon D})) \quad (4.5)$$

**3) První invariant tenzoru přetvoření je úměrný prvnímu invariantu tenzoru napětí**

$$I_1(T_{\sigma}) = \alpha * (I_1(T_{\varepsilon})) \quad (4.6)$$

**4) Druhý invariant deviátoru tenzoru napětí je úměrný druhému invariantu deviátoru tenzoru přetvoření**

$$I_2(T_{\sigma D}) = \beta * (I_2(T_{\varepsilon D})) \quad (4.7)$$

Z těchto vět je zřejmé, že deformační teorie plasticity nepočítá s tenzory  $T_{\sigma D}$  a  $T_{\varepsilon D}$ , tedy s rychlostí změny deviátoru tenzoru napětí, resp. přetvoření. Ze vztahu (3.1) tedy ubudou jim příslušné členy a pak lze získat zmíněné závislosti mezi konečnými hodnotami složek tenzoru napětí a tenzoru přetvoření ve tvaru

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \mathbf{D} * \mathbf{T}_{\varepsilon} \quad (4.8)$$

kde  $\mathbf{T}_{\sigma}$  a  $\mathbf{T}_{\varepsilon}$  jsou tenzory napětí resp. deformace a pro matici  $\mathbf{D}$  platí

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$A = \frac{E}{1-2\mu} + \frac{4G}{1+\varphi}, \quad B = \frac{E}{1-2\mu} - \frac{2G}{1+\varphi}, \quad C = \frac{3G}{1+\varphi}$$

Kde  $\varphi$  je funkce plasticity.

#### 4.1.2 Inkrementální teorie plasticity

„Inkrementální (přírůstková) teorie plasticity poskytuje matematický aparát, umožňující výpočtově modelovat elastoplastickou odezvu materiálu na zatížení.“ [11]

Základní prvky inkrementální teorie plasticity jsou

- mezní podmínka plasticity
- zákon plastického tečení
- zpevnění



## Podmínka plasticity

V předchozím textu byl vymezen mezní stav pružnosti. Tento mezní stav je popsán tzv. podmínkou plasticity. Tato má např. při jednoosém tahovém namáhání tvar

$$\sigma - \sigma_K = 0 \quad (4.10)$$

kde  $\sigma_K$  je mez kluzu materiálu

Bylo již navrženo několik prvotních podmínek plasticity. Z nichž nejpoužívanější je díky implementaci do komerčních systémů MKP podmínka plasticity HMM (Hubert, Mises, Henkey). Další možnou je podmínka plasticity maximálních smykových napětí, popř. zobecněná podmínka plasticity.

Pro podmínku plasticity HMM pro obecnou napjatost v hlavním souřadném systému má pak podmínka tvar

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - \sigma_K = 0 \quad (4.11)$$

Podrobnější informace o podmínkách plasticity je možno nalézt v lit. [1]

## Zákon plastického tečení

Teorie plastického tečení vychází s těchto 3 vět:

**1) Přírůstek objemové deformace je úměrný přírůstku středního napětí**

$$d\varepsilon_s = \alpha * d\sigma_s \quad (4.12)$$

**2) Přírůstek deviatoru tenzoru plastických deformací je úměrný deviatoru tenzoru napětí**

$$d\varepsilon_D^{pl} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (4.13)$$

**3) Intenzita napětí je funkcí integrálu přírůstku plastické deformace**

$$\sigma_i = \Phi \int d\varepsilon^{pl} \quad (4.14)$$

## **Zpevnění**

„Podmínky plasticity uvedené v předchozím textu byly tzv. prvotní podmínky plasticity, které popisují první dosažení mezního stavu pružnosti v procesu zatěžování tělesa. V reálných podmínkách zatěžování těles jsou však časté případy, u nichž střídají cykly zatěžování a odlehčování, přičemž v průběhu zatěžování se překračuje mezní stav pružnosti. Následné podmínky plasticity popisují stavy tělesa při opakovaných překračováních mezních stavů pružnosti po předcházejících odlehčováním“ [1]

Především pro potřeby výpočtového modelování chování elasticko-plastických materiálů prostřednictvím MKP jsou k dispozici následující modely zpevnění

### **Ideálně plastický materiál**

- V tomto případě se neuvažuje žádné zpevnění, následná podmínka plasticity je totožná s prvotní

### **Izotropní zpevnění**

- Plocha následné podmínky plasticity má stejný tvar, liší se však její velikostí

### **Kinematické zpevnění**

- Plocha následné podmínky plasticity má stejný tvar i stejnou velikost jako plocha prvotní podmínky plasticity, mění se její poloha

### **Izotropně kinematické zpevnění**

- Je to kombinace předchozích dvou případů, následná plocha mění svou velikost a polohu

## 5 Hyperelastické materiály v systémech MKP

Pro ověření správného zadání všech potřebných parametrů modelu materiálu se obecně doporučuje simulace jednoduchých zkoušek, pro které jsou známy výsledky z experimentu. Na základě srovnání s těmito daty lze snadno poznat, zda a do jaké míry je zadání korektní a model věrohodný. Pro tyto účely a pro potřeby této práce byly provedeny simulace zkoušek jednoosé tahové, dvouosé tahové, smykové zkoušky (tah při zabráněné příčné deformaci a jednoosé tlakové. Pro první tři zkoušky jsou pro potřeby této práce k dispozici experimentální data získané od Jorgena Bergstorma, Ph.D z jeho internetových stránek věnovaných výpočtovému modelování polymerů. Pro čtvrtou zkoušku, tedy pro jednoosou tlakovou, experimentální data k dispozici nejsou. Lze však použít data ze zkoušky dvouosé tahové. Tyto data je nutné přepočítat na odpovídající hodnoty přetvoření a to za předpokladu objemové nestlačitelnosti. Zmíněný postup přepočtu bude popsán v této kapitole.

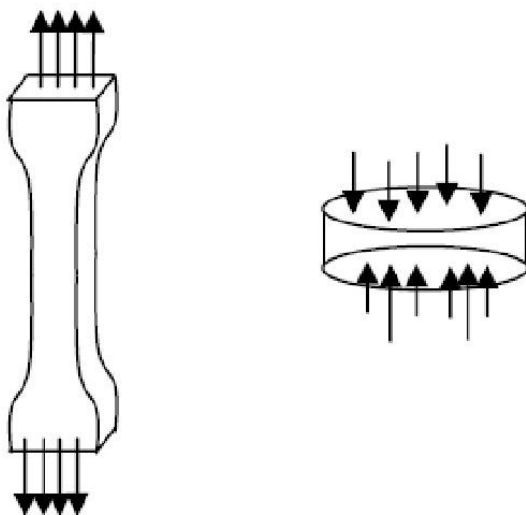
### 5.1.1 Jednoosá tahová a jednoosá tlaková zkouška

Princip jednoosé tahové popř. tlakové zkoušky je znázorněn na obrázku 5.1 Pro tuto zkoušku za předpokladu objemově nestlačitelného materiálu platí [4]

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (5.1)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{jednoose} = 1 + \varepsilon_{jednoose} \quad (5.2)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{jednoose}}} \quad (5.3)$$



Obrázek 5.1.jednoosá tahová/tlaková zkouška

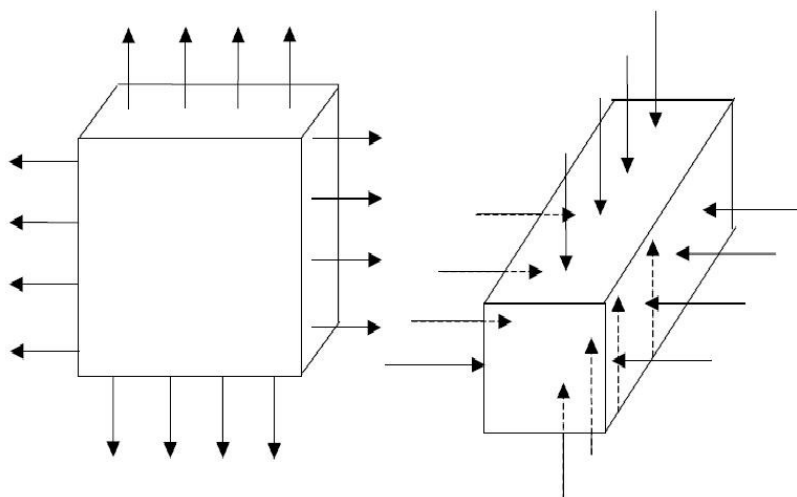
### 5.1.2 Dvouosá tahová a dvouosá tlaková zkouška

Při této zkoušce je materiál rovnoměrně natahován, popř. stlačován ve dvou směrech (proto je tato zkouška často označována jako zkouška ekvibiaxiální). Ve třetím směru se může volně

deformovat. Tato zkouška je znázorněna na obr (5.2). Pro poměrná protažení při této zkoušce za předpokladu nestlačitelného materiálu [4]

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{dvouose} = 1 + \varepsilon_{dvouose} \quad (5.4)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_{dvouose}^2} \quad (5.5)$$



Obr. 5.2. dvouosá tahová/tlaková zkouška

### 5.1.3 Zkouška smykem

Tato zkouška je v praxi velmi těžko realizovatelné, pro nestlačitelný materiál lze však jako experimentální data použít data ze zkoušky tahem popř. tlakem při nulových příčných přetvořeních (tzv. zkouška v rovinné deformaci). Pro poměrná protažení při zkoušce smykem ze předpokladu nestlačitelného materiálu platí [4]

$$\lambda_1 = \lambda_{smyk} = 1 + \varepsilon_{smyk} \quad (5.6)$$

$$\lambda_2 = 1 \quad (5.7)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{smyk}}} \quad (5.9)$$

### 5.1.4 Zkouška objemové stlačitelnosti

Tuto zkoušku si lze představit jako odezvu materiálu na zatížení hydrostatickým tlakem. Jedná se tedy o zkoušku v rovnoměrné trojosé deformaci. V praxi je realizovatelná na běžných zkušebních strojích a to vtlačováním vzorku do komory stejné velikosti těsným pístem. Pro poměrná přetvoření platí při zkoušce v trojosé rovinné napjatosti [4]

$$J = \frac{V}{V_0} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.10)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_{objem} \quad (5.11)$$

$$J = \lambda_{objem}^3 \quad (5.12)$$

### 5.1.4 Rovnocennost jednoosé tlakové zkoušky rovnoměrné dvouosé zkoušky tahem

Pro potřeby této práce bude vhodné ověřit správnost zadaných parametrů také při jednoosé tlakové zkoušce a to proto, že k namáhání tímto způsobem bude docházet u tlumičů rázu v další kapitole této práce. Pro tuto zkoušku nejsou k dispozici experimentální data. Pro porovnání lze použít data ze zkoušky rovnocenné, a to ze zkoušky rovnoměrným dvouosým tahem. Stejným napětím u obou zkoušek odpovídají různé hodnoty poměrných protažení. Tato skutečnost lze s použitím vztahů (5.1-5.5) zohlednit následovně

$$\lambda_{jednoose} = \frac{1}{\lambda_{dvouose}^2} \quad (5.13)$$

## 5.2 Modely hyperelastických materiálů v systému PAM-CRASH

V systému PAM-CRASH je pro řešení problémů hyperelastických materiálů k dispozici několik modelů těchto materiálů. [4], [8]

Modely hyperelastických materiálů pro objemové prvky v systému PAM-CRASH

- Baltz-Ko ruber solid (material type 11)
- Hyperelastic Mooney-Rivlin solid (material type 17)
- Hyperelastic Hard-Smith solid (material type 18)
- případně další

Modely hyperelastických materiálů s možností zahrnutí viskozních vlastností materiálu

- Visco-hyperelastic Mooney-Rivlin for solid elements (material type 19)
- Visco-elastic Ogden rubber for solid elements (material type 37)
- případně další

Dodavatel systému PAM-CRASH pro modelování problémů hyperelastických materiálů doporučuje material typ 17 a materiál typ 37. Tyto budou použity v této práci, zbývajícím již nebude věnována pozornost.

### 5.2.1 Hyperelastic Mooney-Rivlin solid (material type 17)

V systému PAM-CRASH, materiál označený jako „material type 17“ je model materiálu pro hyperelastické materiály, modelované s využitím objemových prvků. Tento model je založen na dvou-parametrickém Mooney-Rivlinově modelu konstitutivní závislosti hustoty energie napjatosti popsaném v kapitole 3.2.2 této práce. Předností tohoto modelu je schopnost postihnout hysterezní vlastnosti materiálu.

Hustota energie napjatosti je v tomto případě modelována vztahem

$$W = A(I_1 - 3) + B(I_2 - 3) + W(I_3) \quad (5.14)$$

Kde  $I_1, I_2, I_3$  jsou tři invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, koeficienty  $A$  a  $B$  jsou materiálové parametry.

Poslední člen vztahu (5.1) popisuje objemovou stlačitelnost, tento je dán vztahem

$$W(I_3) = C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3 - 1)^2 \quad (5.15)$$

Kde parametr  $C$  je parametr závislý na materiálových parametrech  $A$  a  $B$ , parametr  $D$  je parametr závislý na  $A, B$  a na Poissonově poměru  $\nu$ .

$$C = \frac{1}{2}A + B \quad (5.16)$$

$$D = \frac{A(5\nu-2)+B(11\nu-5)}{2(1-2\nu)} \quad (5.17)$$

Odpovídající počáteční modul pružnosti a modul objemové stlačitelnosti jsou pak

$$E = 4(1 + \nu)(A + B) \quad (5.18)$$

$$K = \frac{4}{3} \left[ \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right] (A + B) \quad (5.19)$$

## Poznámky pro materiál 17

*Tento materiál je určen pro modelování problémů hyperelastických materiálu s využitím objemových prvků.*

*Tento materiál se vyznačuje nenulovou objemovou stlačitelností, je označován jako „slightly compressible hyperelastic material“, tedy mírně stlačitelný hyperelastický materiál.*

*Materiál umožňuje zadávat jiné parametry ( $A_{Load}, B_{Load}, \nu_{Load}$ ) pro zatěžování a ( $A_{unload}, B_{unload}, \nu_{unload}$ ) pro odlehčování a tím je schopen modelovat hysterézní vlastnosti materiálu. V případě využití této možnosti je potřeba programu zadat interval, po kolika cyklech má kontrolovat zda se jedná o zatěžování nebo o odlehčování aby byl schopen používat příslušné parametry. Pokud nejsou zadány žádné parametry pro odlehčení, program považuje materiál za materiál bez hysterézních vlastností.*

*Pokud uživatel nezadá parametry, program bude očekávat zadání křivek jednoosé tahové, popř tlakové zkoušky pro zatěžování a odlehčování. V případě zadání křivek se automaticky pomocí metody nejmenších čtverců vypočítají koeficienty  $A$  a  $B$  vztahu (5.14) tak aby funkce co nejlépe aproximovala experimentální data. Opět je možno popsat hysterézní vlastnost materiálu a to pomocí zadání dvou křivek, kde jedna představuje zatěžování a druhá odlehčování. Při zadávání křivek je třeba dbát na zadání dat ve správném formátu. Tento model materiálu očekává zadání experimentálních závislostí smluvního přetvoření (v procentech) na skutečném napětí.*

### 5.2.2 Visco-elastic Ogden rubber for solid elements (material type 37)

Tento materiál je určen pro modelování problémů hyperelastických materiálů s použitím objemových prvků. Je založen na Ogdenově modelu konstitutivní závislosti energie napjatosti pro gumu. Tento byl popsána v kapitole 3.2.2. S použitím tohoto modelu materiálu je možno mimo jiné modelovat také visko-elastickou odezvu materiálu.

V systému PAM-CRASH je pro materiál 37 hustota energie napjatosti modelována vztahem

$$W = \sum_{A=1}^3 \sum_{i=1}^N 2 \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \bar{\lambda}_A^{\alpha_i} - 1 \right) + \frac{K}{2} (J - 1)^2 \quad (5.20)$$

Což je v podstatě vztah (3.7)

Viskoelastická odezva je zde zahrnuta pomocí tzv. konvolučního integrálu. Tento má tvar

$$\tau^v(t) = \sum_{i=1}^M G_i \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}} \text{dev}(\bar{F}\bar{F}^T) ds \quad (5.21)$$

Kde tato viskoelastická odezva se například pro tzv. druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí (2.15) zavádí následovně

$$S^v = F^{-1} \tau^v F^{-T} \quad (5.22)$$

Kde F je tenzor deformačního gradientu (2.8c),

#### **Poznámky k materiálu 37**

*Parametry Ogdenova modelu konstitutivní závislosti můžou být zadány dvěma způsoby*

- 1) *Přímo zadáním hodnot těchto parametrů ( $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  a  $\nu$  kde  $i = 1, N$  představuje řád modelu*
- 2) *Pomocí experimentálních dat, kdy systém PAM-CRASH pomocí metody nejmenších čtverců dopočítá parametry tak, aby model co nejlépe aproximoval deformačně-napěťovou odezvu. V tomto případě je potřeba zadat řád modelu. Experimentální data mohou být z následujících zkoušek*

*Pro výpočet parametrů  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$*

- *Jednoosá tahová/tlaková zkouška*
- *Dvouosá tahová/tlaková zkouška*
- *Smyková zkouška*

*Pro výpočet Poissonova poměru  $\nu$*

- *Objemová zkouška*

*Model může být nestabilní v případě, že není splněn následující podmínka*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i > 0 \quad (5.23)$$

*Pokud uživatel zadá parametry Ogdenova modelu a také experimentální dat, program použije zadané parametry jako vstupní parametry pro aproximaci pomocí nelineární metody nejmenších čtverců. Tohoto je vhodné využít například, pokud hodnota některého parametru  $\mu_i$  je velmi malé číslo, protože toto může způsobit poměrně vysokou nepřesnost numerického výpočtu.*

### **5.2.3 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému PAM-CRASH**

Budou realizovány následující zkoušky

- Jednoosá tahová
- Jednoosá tlaková
- Dvouosá rovnoměrná tahová
- Zkouška tahem při zabráněné příčné deformaci

Výsledky těchto zkoušek, tedy napětově deformační charakteristiky budou srovnány s výsledky experimentu Jorgena Bergstorma, tedy s daty použitými pro výpočet konstant modelů materiálu. Pokud jsou parametry modelu správně zadány, rozdíl by měl být co možná nejmenší.

Poznámky k modelům jednoduchých zkoušek v systému PAM-CRASH

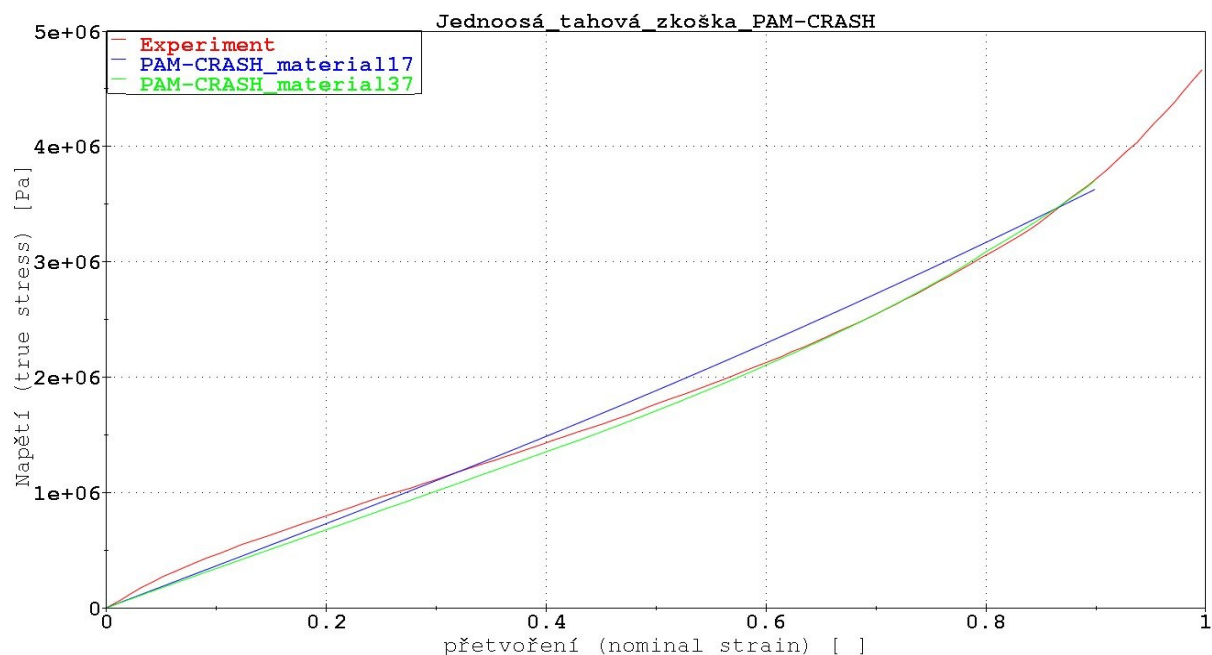
- Úloha bude řešena jako kvazi-statická
- Úloha bude řešena v 3D
- Všechny vstupní veličiny a tedy i výsledky budou v základním jednotkovém systému SI
- Síť bude tvořena jedním prvkem typu Solid
- Použity budou dva modely materiálu, materiál 17 a materiál 37
- Zatížení bude deformační, zadáno pomocí posuvů a rychlostí do vybraných uzlů

Pro tvorbu modelů bylo použito textového editoru Nedit.



## Simulace jednoosé tahové zkoušky v systému PAM-CRASH

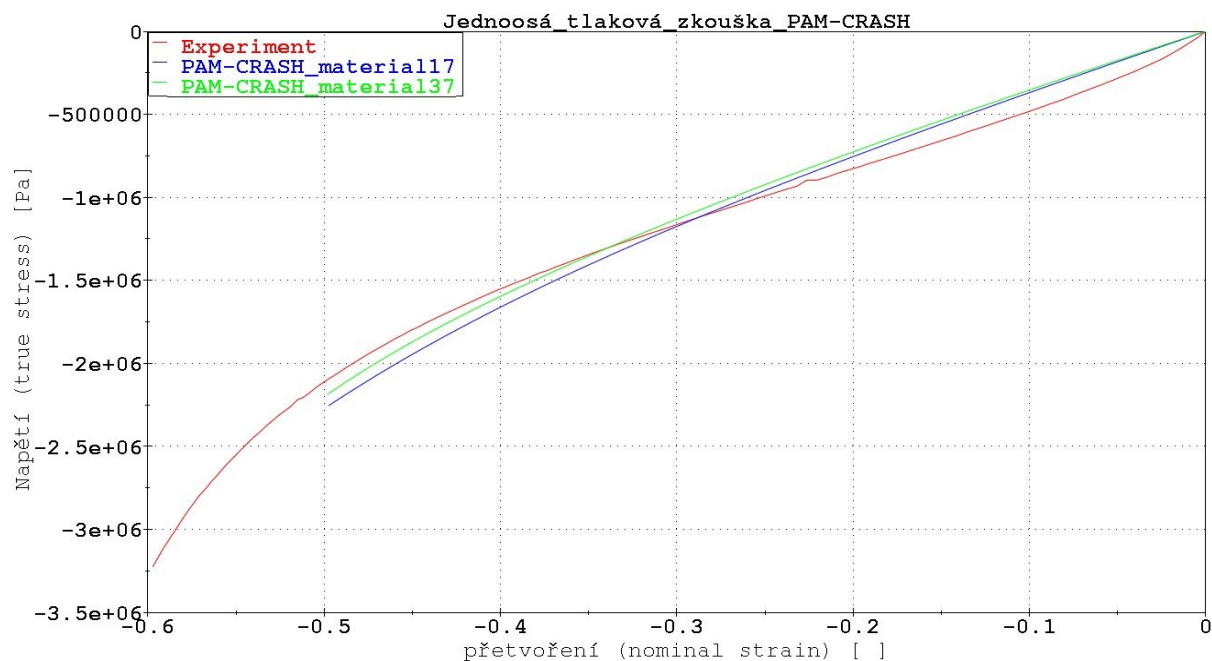
Pro vyhodnocení výsledků bylo použito Post-procesoru META, od řeckého výrobce Beta Cae.



Obrázek 5.5 jednoosá tahová zkouška v system PAM-CRASH - výsledky

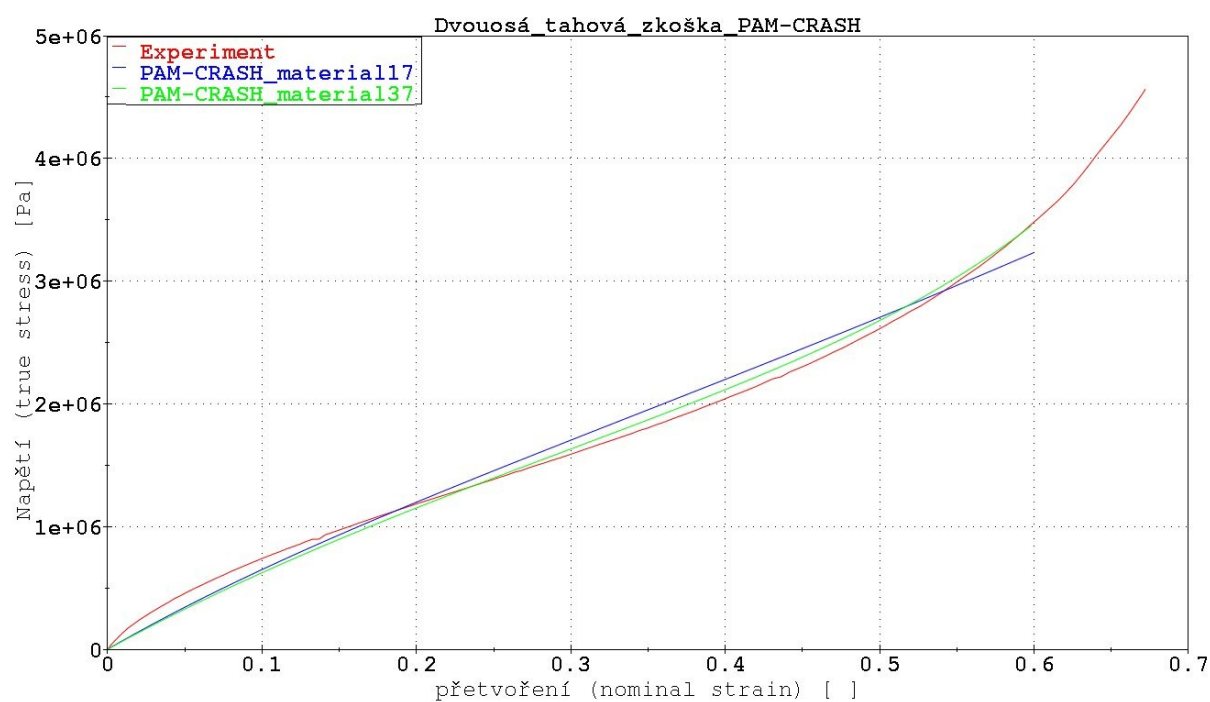
## Simulace jednoosé tlakové zkoušky v systému PAM-CRASH

Pro posouzení věrohodnosti této zkoušky nejsou k dispozici experimentální data. Je potřeba použít data zkoušky rovnocenné, tak jak bylo popsáno v úvodu kapitoly 5.



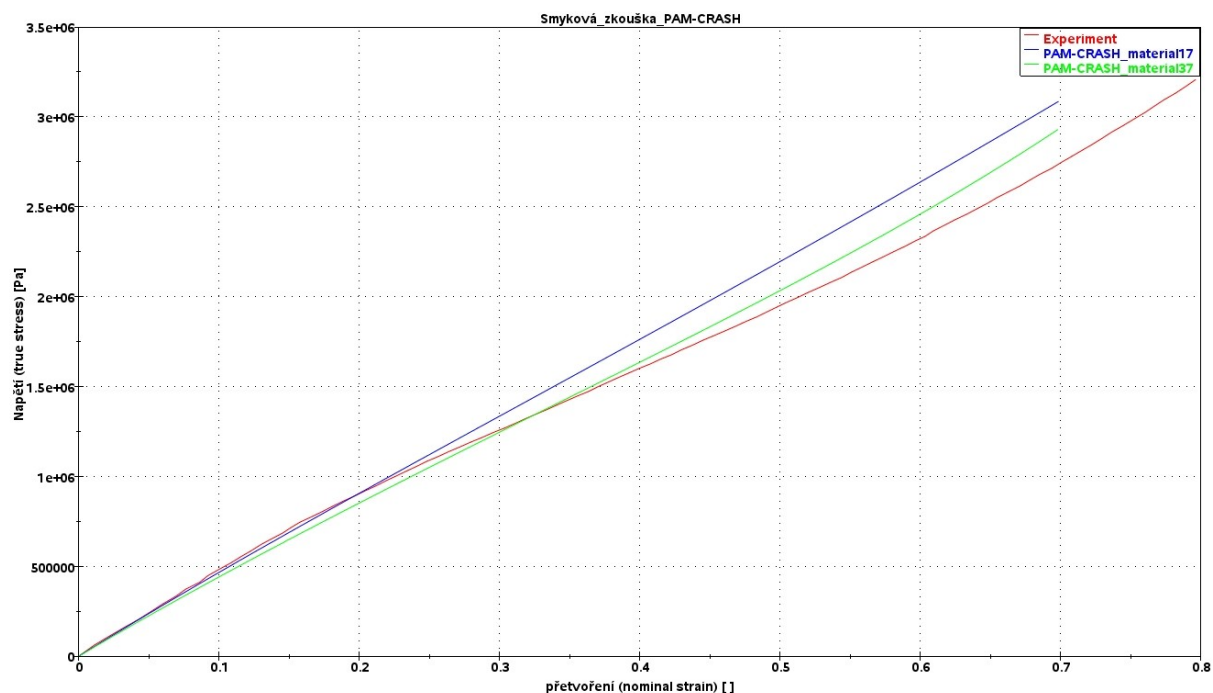
Obrázek 5.6 jednoosá tlaková zkouška v systému PAM-CRASH - výsledky

## Simulace rovnoměrné dvouosé tahové zkoušky v systému PAM-CRASH



Obrázek 5.7 dvouosá rovnoměrná tahová zkouška v systému PAM-CRASH - výsledky

## Simulace zkoušky při zabráněné příčné deformaci v systému PAM-CRASH



Obrázek 5.8 zkouška při zabráněné příčné deformaci v systému PAM-CRASH - výsledky

### 5.3 Modely hyperelastických materiálů v systému LS-DYNA

V systému LS-DYNA je podobně jako v systému PAM-CRASH pro řešení problémů hyperelastických materiálů k dispozici několik materiálových modelů. [5]

Modely hyperelastických materiálů v systému LS-DYNA pro objemové prvky

- Bltz-Ko rubber (material type 7)
- Mooney-Rivlin rubber (material type 27)
- Hyperelastic rubber (material type 77)
- Ogden rubber (material type 77)
- Cellular rubber (material type 87)
- Případně další

Pro potřebu této práce byly vybrány dva s těchto modelů materiálu. Materiál typu 27 a materiál typu 77. zbývajícím již nebude v této práci věnována pozornost.

#### 5.3.1 Mooney-Rivlin rubber (material type 27)

Tento model materiálu je obdobou modelu popsaného v kapitole 5.1.1 této práce. Je založen na dvou parametrickém Mooney-Rivlinově modelu (3.4). Měrná energie napjatosti se zde zavádí pomocí vztahu

$$W = A(I_1 - 3) + B(I_2 - 3) + C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3^{-2} - 1)^2 \quad (5.23)$$

Kde parametry A, B, C, D jsou konstanty Mooney-Rivlinova modelu,  $I_1, I_2$  a  $I_3$  jsou invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru napjetí. První dvě konstanty jsou dva parametry Mooney-Rivlinova modelu, pro parametry C a d platí

$$C = 0.5A + B \quad (5.24)$$

$$D = \frac{A(5\nu-2)+B(11\nu-5)}{2(1-2\nu)} \quad (5.25)$$

Kde  $\nu$  je poissonův poměr.

Při zadávání parametrů je možno vlastnosti materiálu opět zadat dvěma způsoby

- Pokud známe hodnoty dvou Mooney-Rivlinových parametrů je možno tyto zadat.
- Pokud známe jen výsledky jednoosé tahové popřípadě tlakové zkoušky, je možno zadat přímo tyto data a systém si pomocí metody nejmenších čtverců sám dopočítá parametry tak aby model co nejlépe aproximoval průběh deformačně napětíové charakteristiky. Jsou očekávána data typu změna délky ve směru zatížení a jí odpovídající síla popřípadě nominální napětí v závislosti na nominálním přetvoření. V prvním případě systém očekává zadání počáteční rozměry vzorku, na kterém byla naměřena experimentální data, ve druhém případě se tyto zadují rovny 1.

### 5.3.2 Hyperelastic rubber (material type 77)

Jedná se o první ze dvou variant modelu materiálu typu 77. Je určen pro řešení problémů hyperelastických materiálů, které jsou téměř nestlačitelné ( $\nu > 0.49$ ), navíc je schopen modelovat viskoelastickou odezvu materiálu. Měrná hustota energie napjatosti se zavádí ve vztahu

$$W = \sum_{p,q}^n C_{pq} (\bar{I}_1 - 3)^p (\bar{I}_2 - 3)^q + W_h(J) \quad (5.26)$$

Viskoelastická odezva je zahrnuta pomocí konvolučního integrálu, tento má tvar

$$S_{ij} = \int_0^t G_{jkl}(t - \tau) \frac{\partial E_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (5.27)$$

Kde  $S_{ij}$  je druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí,  $E_{kl}$  je Green-Lagrangeův tenzor přetvoření,  $G_{jkl}(t - \tau)$  je relaxační funkce. Napjetí získané ze vztahu (5.27) se přičte k napjetí získanému s funkce hustoty energie napjatosti (5.26)

Vztah (5.26) je vlastně vztah (3.7), což je polynomický model konstitutivní závislosti energie napjatosti

Pro zadání parametrů tohoto modelu je opět možno posupovat dvěma způsoby.

#### Přímo zadáním parametrů modelu

Počet parametrů je závislý na řádu modelu

- model prvního řádu C10 a C01
- model druhého řádu C10, C01, C11, C20 a C02
- model třetího řádu C10, C01, C11, C20, C02 a C30

#### Pomocí experimentálních dat

Pro tento model je možno zadat výsledky jednoosé tahové zkoušky a systém si pomocí metody nejmenších čtverců sám vypočítá parametry modelu. Je potřeba zadat požadovaný řád modelu.

### 5.3.3 Ogden rubber (material type 77)

Druhá varianta modelu typu 77 je založena na Ogdenově konstitutivním vztahu energie napjatosti popsaném v kapitole 3.2.1 vztahem (3.7). Viskoelastická odezva je zde opět zahrnuta podobně jako v předchozím případě pomocí konvulčního integrálu (5.27). Jediný podstatný rozdíl je tedy v konstitutivním vztahu energie napjatosti, který má jiné parametry.

Zadání parametrů modelu

Přímo zadáním parametrů modelu

Pokud známe parametry modelu, je možno zadat přímo tyto parametry  $(\mu_i, \alpha_i)$ , je možno zadat 1 až 8 dvojic parametrů

Pomocí experimentálních dat

Pro tento model tyto data mohou být z některé z následujících zkoušek

- jednoosá tahová/tlaková
- dvouosá rovnoměrná tahová/tlaková zkouška

### **5.3.4 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému LS-DYNA**

Budou realizovány následující zkoušky

- Jednoosá tahová
- Jednoosá tlaková
- Dvouosá rovnoměrná tahová
- Zkouška tahem při zabráněné příčné deformaci

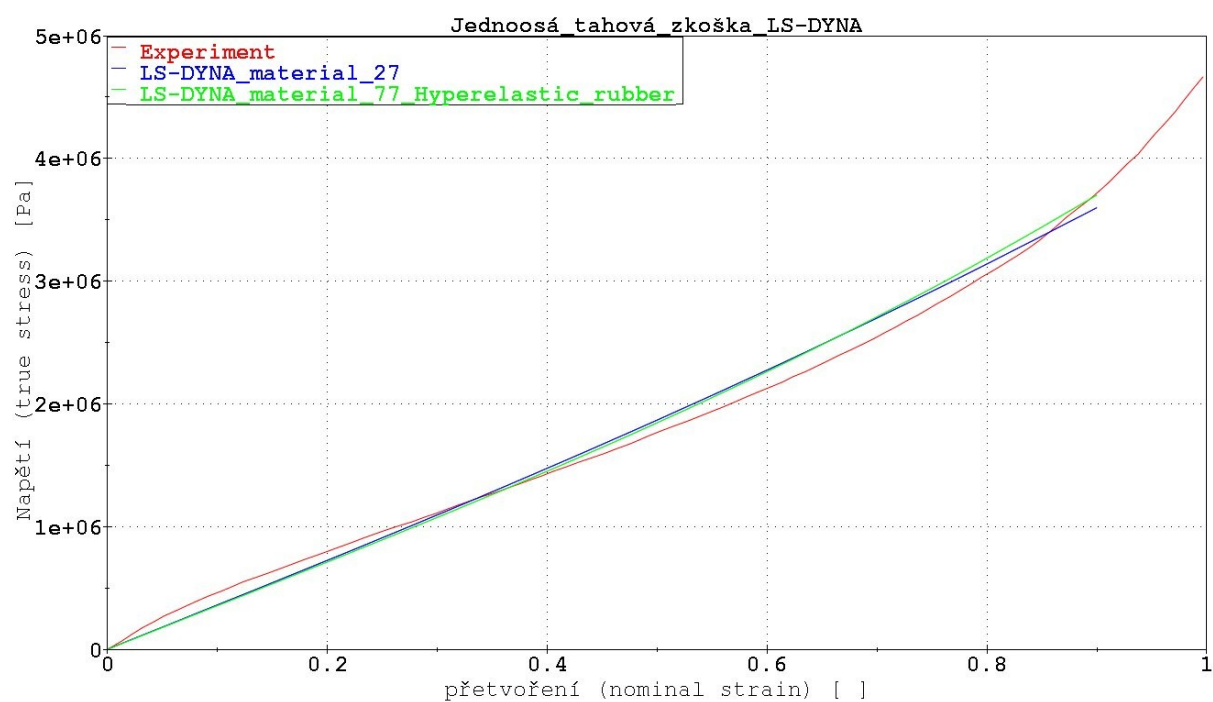
Postup bude velmi podobný postupu použitému v kapitole 5.1.3, opět budou realizovány simulace jednoduchých zkoušek a jejich výsledky budou srovnány s výsledky experimentu (Jorgen Bergstorm, PhD)

Poznámky k modelům jednoduchých zkoušek v systému LS-DYNA

- Úloha bude řešena jako kvazi-statická
- Úloha bude řešena v 3D
- Všechny vstupní veličiny a tedy i výsledky budou v základním jednotkovém systému SI
- Síť bude tvořena jedním prvkem typu Solid
- Použity budou dva modely materiálu, materiál 27 a materiál 77
- Zatížení bude deformační, zadáno pomocí posuvů a rychlostí do vybraných uzlů

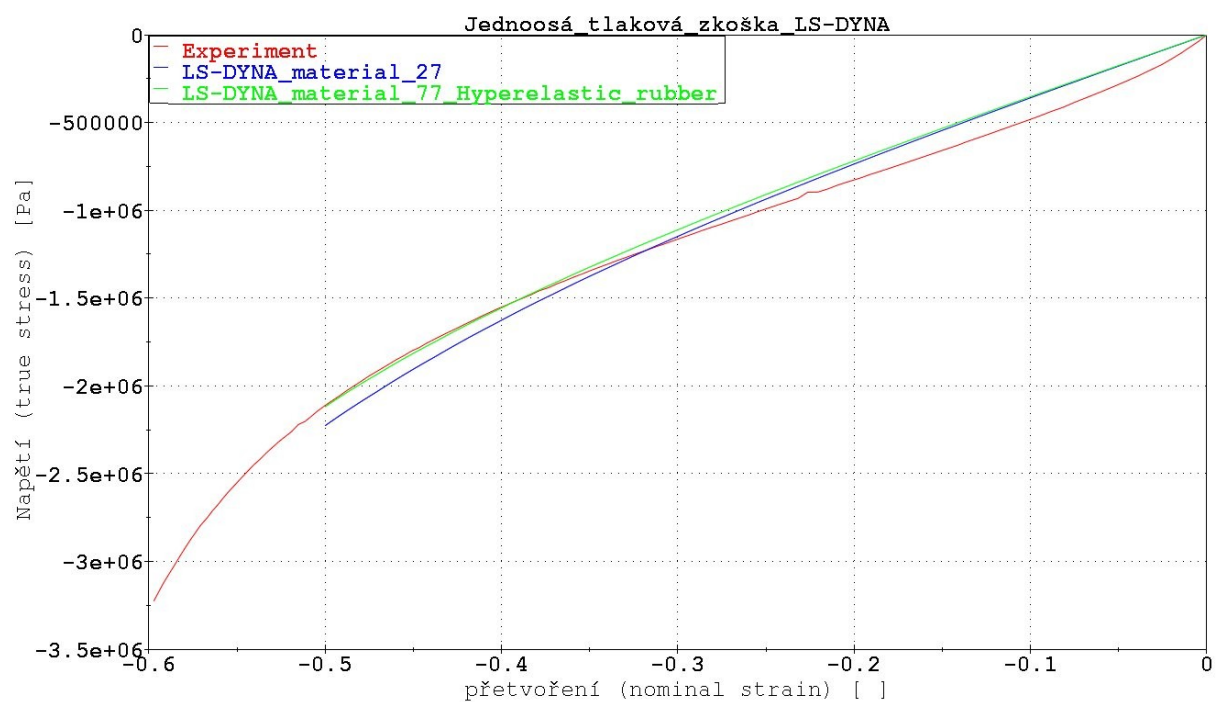
Pro tvorbu modelů bylo použito textového editoru Nedit. Karty použitých materiálů jsou na obr. 5.9 a 5.10. Podrobný popis těchto karet a význam jejich z členů je možné najít v lit [8].

## Simulace jednoosé tahové zkoušky v systému LS-DYNA



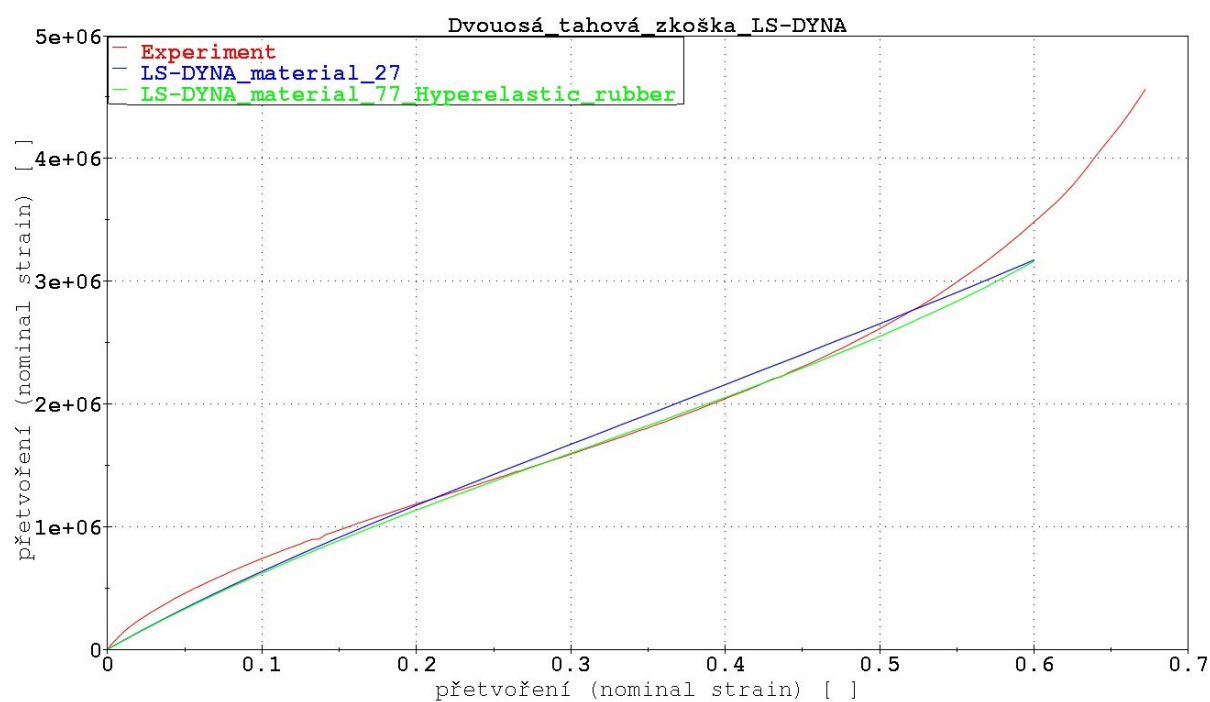
Obrázek 5.11 Jednoosá tahová zkouška V systému LS-DYNA - výsledky

## Simulace jednoosé tlakové zkoušky v systému LS-DYNA



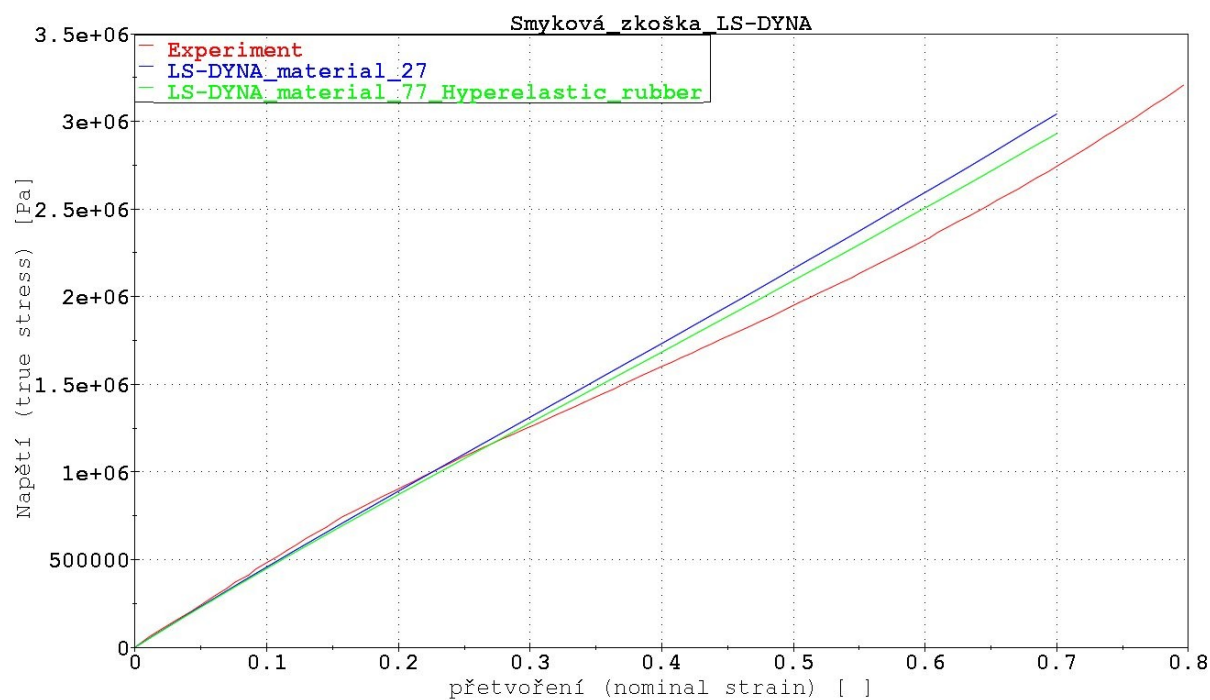
Obrázek 5.12 Jednoosá tlaková zkouška V systému LS-DYNA – výsledky

## Simulace rovnoměrné dvouosé tahové zkoušky v systému LS-DYNA



Obrázek 5.13 Dvouosá rovnoměrná tahová zkouška V systému LS-DYNA – výsledky

## Simulace zkoušky při zabráněné příčné deformaci v systému LS-DYNA



Obrázek 5.14 Simulace zkoušky při zabráněné příčné deformaci v systému LS-DYNA – výsledky

## 5.4 modely hyperelastických materiálů v systému ANSYS

V systému Ansys jsou pro řešení problémů hyperelastických materiálů následující modely materiálů [5]

Pro izotropní hyperelastické materiály

- Neo-Hookean
- Mooney-Rivlin
- Polynomial
- Ogden
- Arruda-Boyce
- Gent
- Yeoh
- Ogden compressible
- Blatz-Ko

Pro potřeby této práce bude pracováno s modely Mooney-Rivlin a Ogden.

### 5.4.1 Material nonlinear hyperelastic Mooney-Rivlin

V systému Ansys je jedním z modelů materiálu určených pro řešení problémů hyperelastických materiálů materiál založený na Mooney-Rivlinově konstitutivním vztahu hustoty energie napjatosti. Tento je zde nabízen v dvou, tří, pěti a devíti parametrické variantě. Tyto byly popsány v kapitole 3.2.2, vztahy (3.4 – 3.6)

Při zadávání parametru tohoto modelu materiálu je možno použít dvou způsobů

- přímo zadáním konstant modelu
- s využitím experimentálních dat

kde tato data mohou být z některé z následujících zkoušek

- jednoosá zkouška tahem/tlakem
- dvouosá rovnoměrná zkouška tahem/tlakem
- zkouška v rovinné deformaci tahem/tlakem
- zkouška ve smyková napjatosti
- zkouška objemové stlačitelnosti

### 5.4.2 Material nonlinear hyperelastic Ogden

Tento model materiálu je založen na konstitutivním vztahu hustoty energie napjatosti podle Ogdena, viz kapitola 3.2.2, vztah (3.7). Při zadávání parametrů modelu je možno postupovat obdobně, jak pro model Mooney-Rivlin, tedy postupem popsaným v kapitole 5.3.1.



### 5.4.3 Výpočtové modely jednoduchých zkoušek v systému ANSYS

Budou realizovány následující zkoušky

- Jednoosá tahová
- Jednoosá tlaková
- Dvouosá rovnoměrná tahová
- Zkouška tahem při zabráněné příčné deformaci

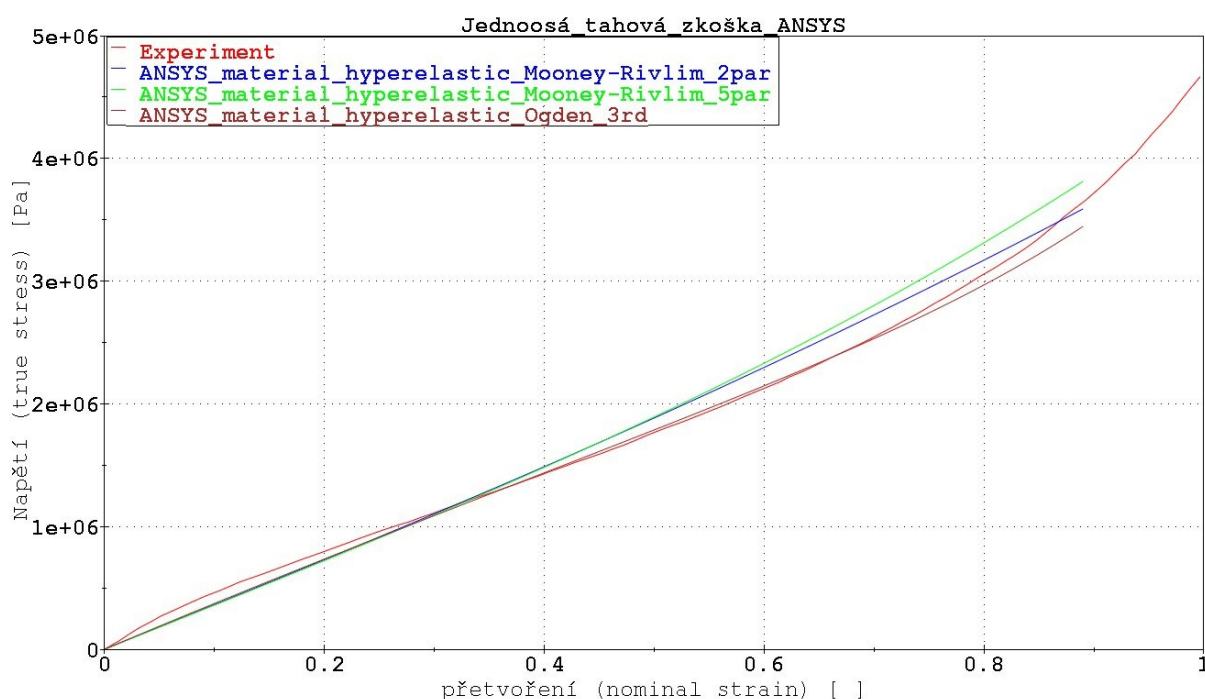
Postup bude velmi podobný postupu použitému v kapitole 5.1.3 a 5.2.3, opět budou realizovány simulace jednoduchých zkoušek a jejich výsledky budou srovnány s výsledky experimentu (Jorgen Bergstorm, PhD)

Poznámky k modelům jednoduchých zkoušek v systému ANSYS

- Úloha bude řešena jako statická
- Úloha bude řešena v rovinné napjatosti
- Všechny vstupní veličiny a tedy i výsledky budou v základním jednotkovém systému SI
- Síť bude tvořena výhradně prvky SOLID 182
- Použity budou tři modely materiálu, Mooney-Rivlin dvou a pěti parametrický a Ogden 3rd
- Zatížení bude deformační, zadáno pomocí posuvů

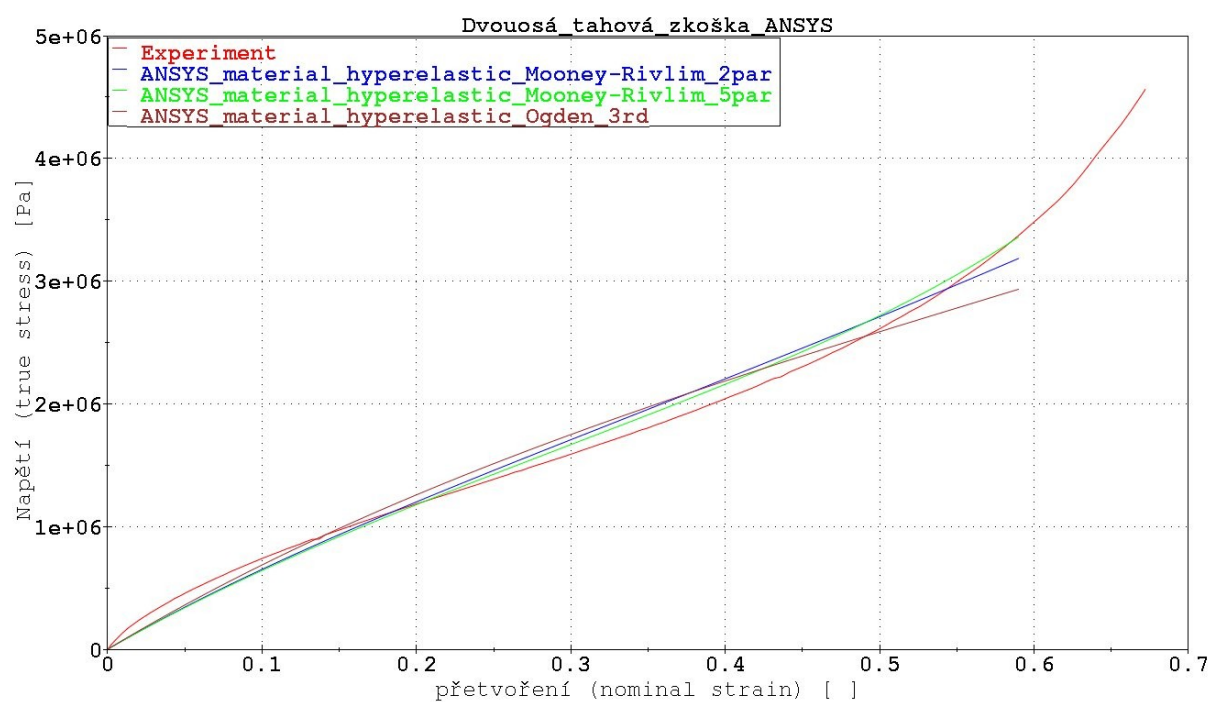
Pro tvorbu modelů bylo použito preeprocesoru ANSYS.

#### Simulace jednoosé tahové zkoušky v systému ANSYS



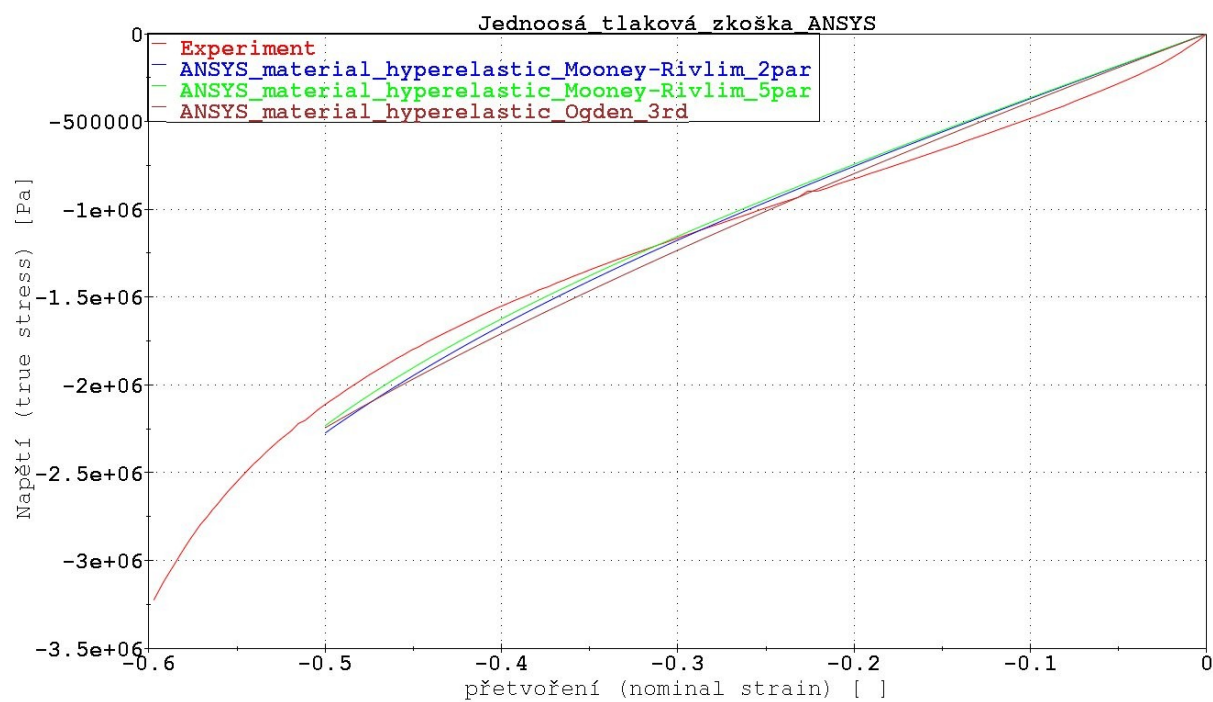
Obrázek 5.15 jednoosá tahová zkouška – výsledky

## Simulace dvouosé rovnoměrné tahové zkoušky v systému ANSYS



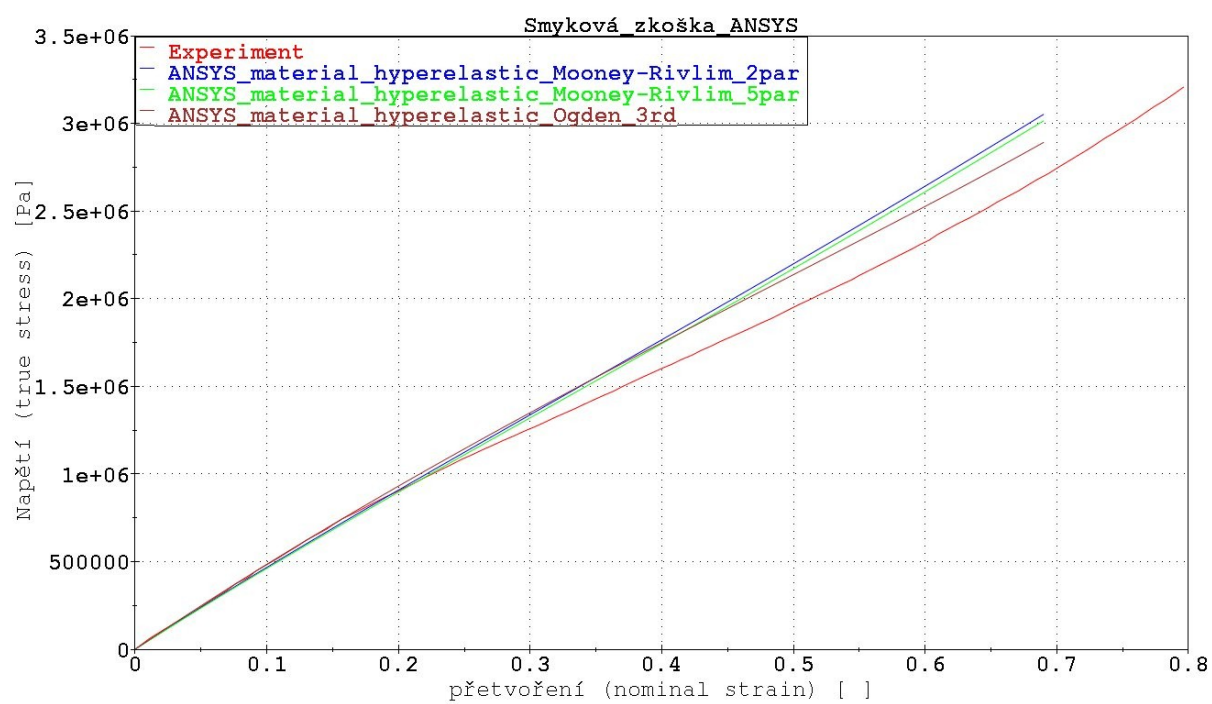
Obrázek 5.16 dvouosá rovnoměrná tahová zkouška – výsledky

## Simulace jednoosé tlakové zkoušky v systému ANSYS



Obrázek 5.17 jednoosá tlaková zkouška – výsledky

## Simulace zkoušky při zabráněné příčné deformaci v systému ANSYS



Obrázek 5.18 zkouška při zabránění příčné deformace – výsledky

## 6 Plastické materiály v systémech MKP

Možnosti modelování problémů plastických materiálů v komerčních systémech MKP jsou již rozpracovány na vysoké úrovni. Pro potřeby této práce postačí základní modely plastických, resp. elasto-plastických materiálů. Složitějším modelům materiálů, které v sobě zahrnují modely porušení, popř. časové závislosti napěťově-deformační charakteristiky zde nebude věnována pozornost, přesto, že jsou do systémů implementovány. Tyto jsou již nad rámec obsahu zadání této práce.

Ověření správnosti zadání parametrů modelů elasto-plastických materiálů autor nepovažuje za potřebnou, nebudou zde realizovány základní materiálové zkoušky podobně jako tomu bylo u hyperelastických materiálů v kapitole 5 této práce. Bude zde uveden přehled základních materiálových modelů vhodných pro modelování plastických materiálů a dále popis základních parametrů, které systém vyžaduje od uživatele při použití těchto modelů.

### 6.1 Plastické materiály v systému PAM-CRASH

#### 6.1.1 Material elastic-plastic for solids (type 1)

Tento model materiálu odpovídá elasto-plastickému izotropnímu modelu materiálu s izotropním multilineárním zpevněním.

Elastické vlastnosti je možno zadat pomocí smykového a objemového modulu. (6.1a, 6.1b)

$$\text{a) } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{b) } K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6.1)$$

Kde  $E$  je Youngův modul a  $\nu$  je Poissonův poměr.

Parametry modelu pro plastické chování mohou být zadány následujícími způsoby

- Zadáním meze kluzu materiálu a tangenciálního modulu zpevnění (sklonu křivky zpevnění)
- Zadáním hodnot plastických přetvoření a jím odpovídajícím hodnot napětí
- Zadáním parametrů ( $k$ ,  $n$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_{max}$ ) Krupkowskiho definice zpevnění
$$\sigma(\varepsilon) = k(\varepsilon + \varepsilon_0)^n$$

Kde  $\varepsilon$  je efektivní plastické přetvoření,  $\sigma_{max}$  je horní limit napětí.

Tento materiál je schopen zahrnout také časově závislost napěťově-deformačních charakteristik. Podrobnější informace je možno nalézt v lit. [7].

#### 6.1.2 Material elastic-plastic for shells (type 103)

Je obdobou materiálu type 1 popsaného v předchozí kapitole. Je určen pro modelování problémů plastických materiálů s využitím tělesových prvků.

## 6.2 Plastické materiály v systému LS-DYNA

Opět se budeme zajímat o možnost popisu chování plastických materiálů bez potřeby modelovat časovou závislost napěťově deformační charakteristiky popřípadě porušování materiálů. Pro tyto potřeby je naprosto dostačujícím modelem materiálu v systému LS-DYNA model materiálu označený material type 3, MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC.

### 6.2.1 Material PLASTIC\_KINEMATIC (type3)

Tento model je použitelný pro izotropní elasticko-plastické materiály se zpevněním. Od uživatele se vyžaduje zadání hodnot následujících parametrů

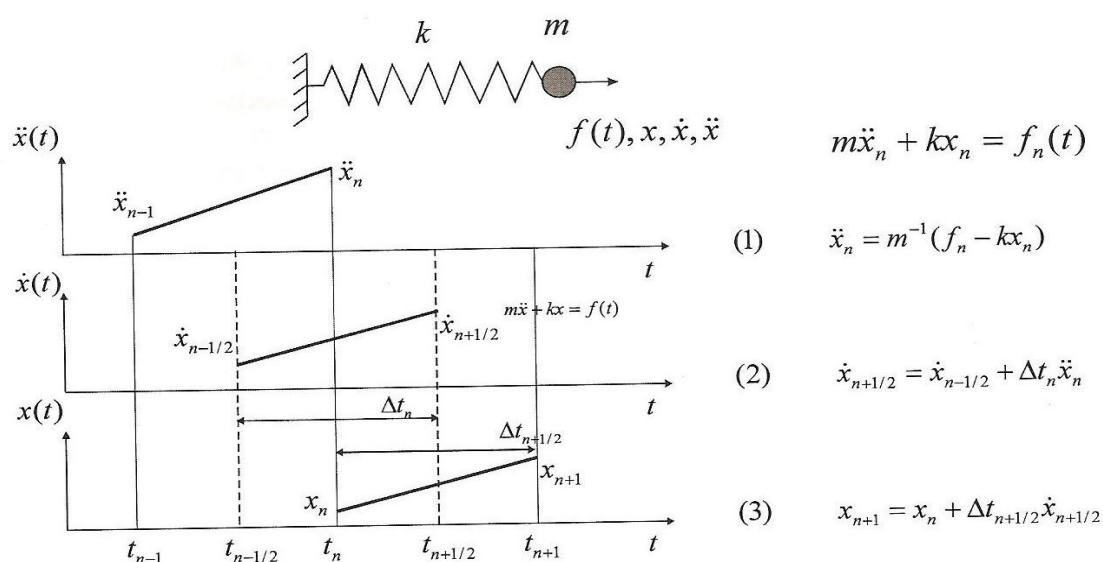
- Hustoty materiálu
- Modulu pružnosti
- Poissonova poměru
- Meze kluzu
- Tangenciálního modulu zpevnění
- Parametru zpevnění  $\beta$  kde  $\beta=0$  odpovídá kinematickému zpevnění a  $\beta=1$  odpovídá izotropnímu zpevnění, hodnota mezi čísly 0 a 1 odpovídá kombinovanému zpevnění

## 7 Explicitní a implicitní algoritmus MKP

Na tomto místě autor považuje za vhodné zdůraznit významný rozdíl systému Ansys oproti systémům PAM-CRASH a LS-DYNA. Tento rozdíl spočívá v rozdílném způsobu integrace pohybových rovnic při řešení problémů. Řešič systému Ansys využívá implicitních metod časové integrace pohybové rovnice, zatímco řešiče PAM-CRASH a LS-DYNA využívají při řešení explicitních metod. Na základě této vlastnosti bývají řešiče často označovány jako explicitní, resp. implicitní, někdy také explicitní resp. implicitní algoritmy MKP.

### 7.1 Explicitní algoritmus MKP

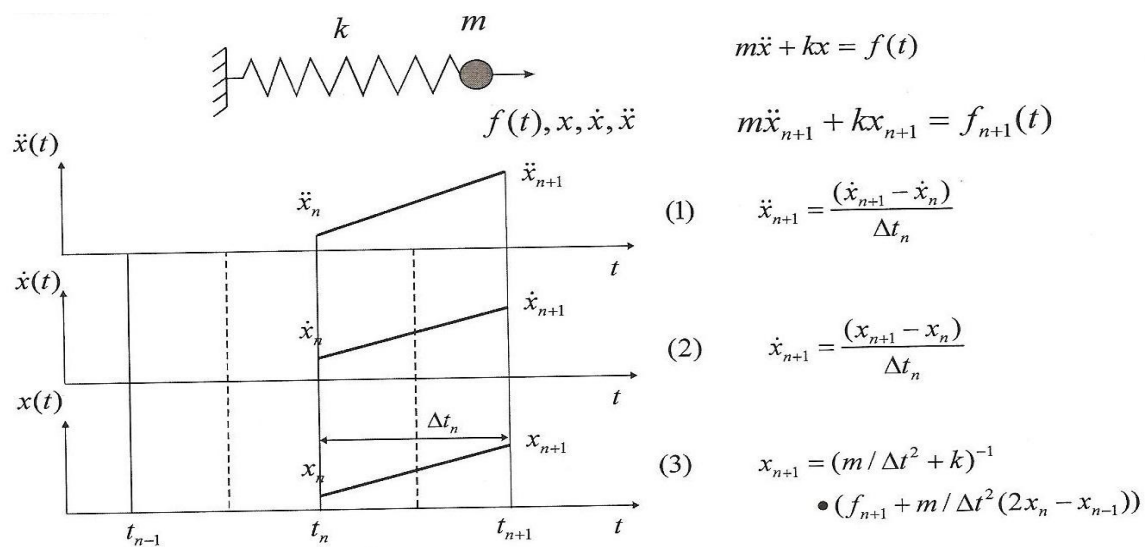
Pro časovou integraci pohybových rovnic explicitní řešiče používají obvykle metodu centrálních diferencí. Schematické znázornění integrace explicitním algoritmem je na obrázku 5.19. Podstatou je, že pro výpočet neznámých veličin v určitém čase se vychází z veličin v předchozím čase.



Obrázek 5.19 schéma explicitní časové integrace [6]

### 7.2 Implicitní algoritmus MKP

U implicitního algoritmu MKP se pro časovou integraci používají implicitní metody. Kdy se pro výpočet veličiny v časovém okamžiku vychází z veličin v tom samém časovém okamžiku. Schéma implicitní časové integrace je znázorněno na obrázku 5.20.



Obrázek 5.20 Schéma implicitní časové integrace [6]

## 8 Vytvoření výpočtového modelu tlumiče rázu

„Model je subjektem účelově vytvořený reálný nebo abstraktní objekt, který obsahuje všechny podstatné charakteristiky primárního objektu, a který se týká určitého zájmu subjektu o tento objekt.“ [1]

S předchozí citace je tedy zřejmé, že pro vytvoření modelu je nutno rozhodnout, které veličiny jsou s pohledu řešitele daného problému podstatné a které nikoliv. O tomto bude pojednáno v kapitole 8.1, kde bude sestaven tzv. systém podstatných veličin objektu. Dalším krokem při tvorbě modelu je vytvoření tzv. modelového objektu a systému veličin na tomto modelovém objektu. Pro určený typ modelového objektu s ohledem na podstatné veličiny na něm je nutné zvolit metodu řešení problému.

### 8.1 Struktura modelu

#### 1. Objekt

Tlumič rázu je pro nás tedy primárním objektem. Model bude tvořen pro tři různé varianty tlumičů, tedy máme tři objekty.

1. varianta - tlumič je plné válcové těleso, materiál tlumiče je hyperelastický
2. varianta - tlumič je tenkostěnné válcové těleso s plastického materiálu
3. varianta – kombinace předchozích dvou, tedy plastické tenkostěnné těleso vyplněné hyperelastickým materiálem

#### 2. Systém podstatných veličin na objektu

$S_0$  - veličiny popisující prvky okolí objektu

Jako podstatné prvky okolí objektu shledávám tyto prvky:

$\Omega_1$  Pomyslná bariéra

- dokonale tuhé těleso
- pevně fixované v prostoru

$\Omega_2$  Těleso

- dokonale tuhé těleso
- jeho poloha je funkcí času
- hmotnost je konstantní

$S_1$  – veličiny komplexně popisující objekt  $\Omega_0$

- vzhledem k tomu, že objekt je tvořen jen jedním prvkem, kterým je samotný tlumič, topologie je velmi jednoduchá.
- tvar tlumiče budu volit pro jednotlivá provedení. Bude se jednat o tenkostěnná a plná válcová tělesa.



**S<sub>2</sub>** – veličiny popisující vazby objektu s okolím a na vazbách probíhající interakce

Vazba číslo 1, tj. vazba objektu s prvkem okolí  $\Omega_1$  (uložení tlumiče na bariéře)

- Tato vazba je realizována jako dokonale tuhé vetknutí tlumiče do bariéry
- Vetknuté části jsou odebrány všechny stupně volnosti

Vazba číslo 2, tj. vazba objektu s prvkem okolí  $\Omega_2$  (kontakt tělesa s tlumičem)

- Tato vazba je realizována pomocí kontaktu, kontaktní síly a tření v kontaktu

**S<sub>3</sub>** – veličiny vyjadřující působení na objekt

- Působící síly a momenty ve vazbě tlumiče s bariérou
- Působící tlakové síly ve vazbě tlumiče s pohybujícím se tělesem

**S<sub>4</sub>** – veličiny ovlivňující procesy, které na objektu probíhají

- Prázdná množina

**S<sub>5</sub>** – strukturně-vlastnostní veličiny

- Konstitutivní vztahy materiálů tlumičů (materiálové charakteristiky)
- Geometrické provedení jednotlivých tlumičů (tvar, rozměry)

**S<sub>6</sub>** – veličiny, popisující procesy

- Při řešení problému nepovažují žádnou veličinu popisující procesy za podstatnou, vzhledem ke zvolené úrovni řešení problému (makroúroveň mechaniky těles).

**S<sub>7</sub>** – veličiny, popisující projevy

- Změna napětí
- Změna tvaru a rozměru

**S<sub>8</sub>** – veličiny, popisující důsledky projevů

- Plastická deformace u plastických materiálů
- Změna velikosti, popř. směru rychlosti pohybujícího se tělesa

### **3. množina dílčích modelů výpočtového modelu**

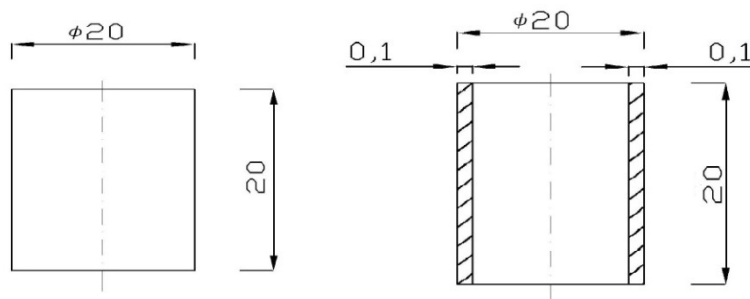
Model problému

**M<sub>1</sub>** - model problému

Model problému byl v podstatě již vytvořen při vytváření systému podstatných veličin na objektu.

**M<sub>2</sub>** - model topologie objektu

Jedna se o model rozmístění objektu a prvků jeho okolí v prostoru. Rozmístění je takové, že objekt je pevně spojen s tuhou nepohyblivou bariérou a v určité vzdálenosti od objektu směrem kolmo na bariéru je tuhé těleso.



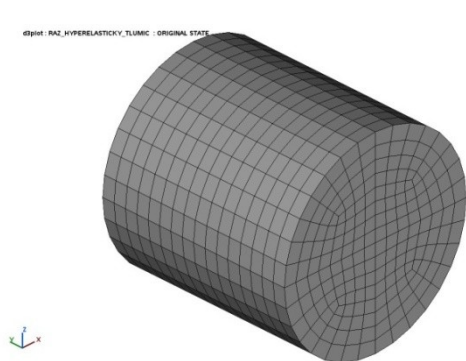
obrázek 8.1 rozměry objektu

### **$M_3$** - model dekompozice objektu

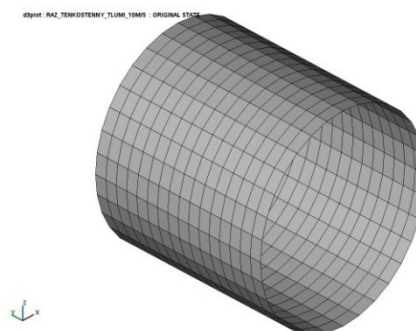
Objekt bude uvolněn od tuhé bariéry, tato bude nahrazena vazbovým působením pomocí okrajových podmínek.

### **$M_4$** - model geometrie objektu

model geometrie objektu bude vytvořen s ohledem na následně použitou metodu řešení pomocí sítě konečných prvků. Pro první variantu objektu bude model geometrie tvořen tělesovými prvky typu SOLID (obrázek 8.2a). Pro druhou variantu bude model geometrie tvořen plošnými prvky typu SHELL (obrázek 8.2b). Pro třetí variantu to bude kombinace výše zmíněných, kdy plášť bude tvořen prvky typu SHELL a vnitřní objem bude vyplněn prvky typu SOLID.



Obrázek 8.2a model geometrie varianty 1



Obrázek 8.2b model geometrie varianty 2

**$M_5$**  - model okolí objektu

Patří sem výše zmíněná vazba objektu s tuhou nepohyblivou bariérou, dále pak vazba objektu s tuhým pohyblivým tělesem.

**$M_6$**  - model vazeb objektu k okolí

První vazba, tedy vazba objektu s tuhou nepohyblivou bariérou bude realizována jako dokonale tuhé vetknutí uzlů, ve kterých dochází ke kontaktu objektu s bariérou.

Druhá vazba, vazba objektu s pohybujiícím se tělesem bude realizována pomocí zatížení kontaktní silou do míst, kde dochází ke kontaktu objektu s tělesem.

**$M_7$**  - model aktivace objektu z okolí

Síly a momenty působící ve vazbách

**$M_8$**  - model okrajových a počátečních podmínek

Model okrajových podmínek

Pomocí modelu okrajových je zde modelováno dokonale tuhé vetknutí. Toto se realizuje předepsáním nulových posuvů a úhlů natočení do vetnutých míst

Model počátečních podmínek

Počáteční podmínky jsou počáteční rychlost pohybujiícího se tělesa a počáteční vzdálenost od objektu.

**$M_9$**  - model vlastností struktury objektu

Budou použity tyto modely materiálu

Pro variantu 1 - Hyperelastický (homogenní, izotropní)

Pro variantu 2 – Pružně plastický (homogenní, izotropní)

Pro variantu 3 – Oba výše uvedené

**$M_{10}$**  - model procesů na objektu

Stav deformace v bodě objektu

**$M_{11}$**  - model projevů objektu

Napjatost v bodě

**$M_{12}$**  – model chování objektu

Napěťově deformační charakteristika

Síla působící na pohybujiící se těleso, tedy jeho zrychlení

## $M_{13}$ – model mezních stavů

Jediný možný mezní stav je na zvolené úrovni mezní stav pružnosti.

### 4. Matematická teorie, metoda a vhodný software

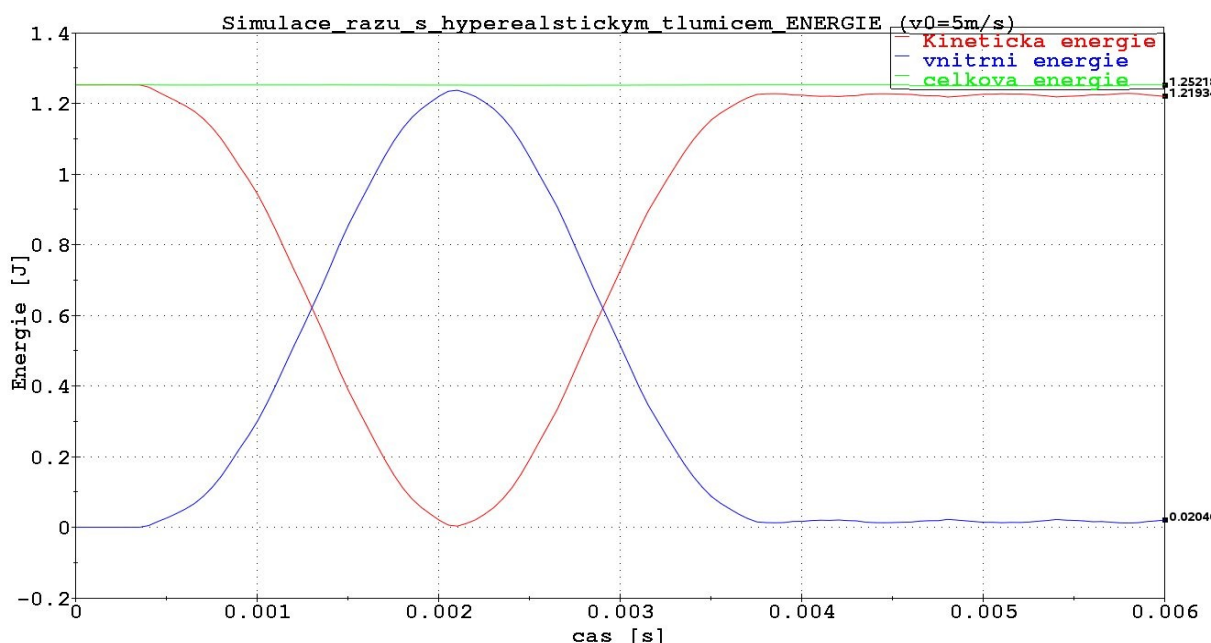
Pro řešení problému bude použita matematická teorie s numerické matematiky a to Metody konečných prvků (MKP). Bude použit explicitní algoritmus MKP, popsáný v kapitole 7 této práce. Pro řešení této metody budou použity programy PAM-CRASH a LS-DYNA, vzhledem k jejich předurčení pro řešení problémů rychlých dynamických dějů.

## 8.2 Výpočtové modely v systému PAM-CRASH

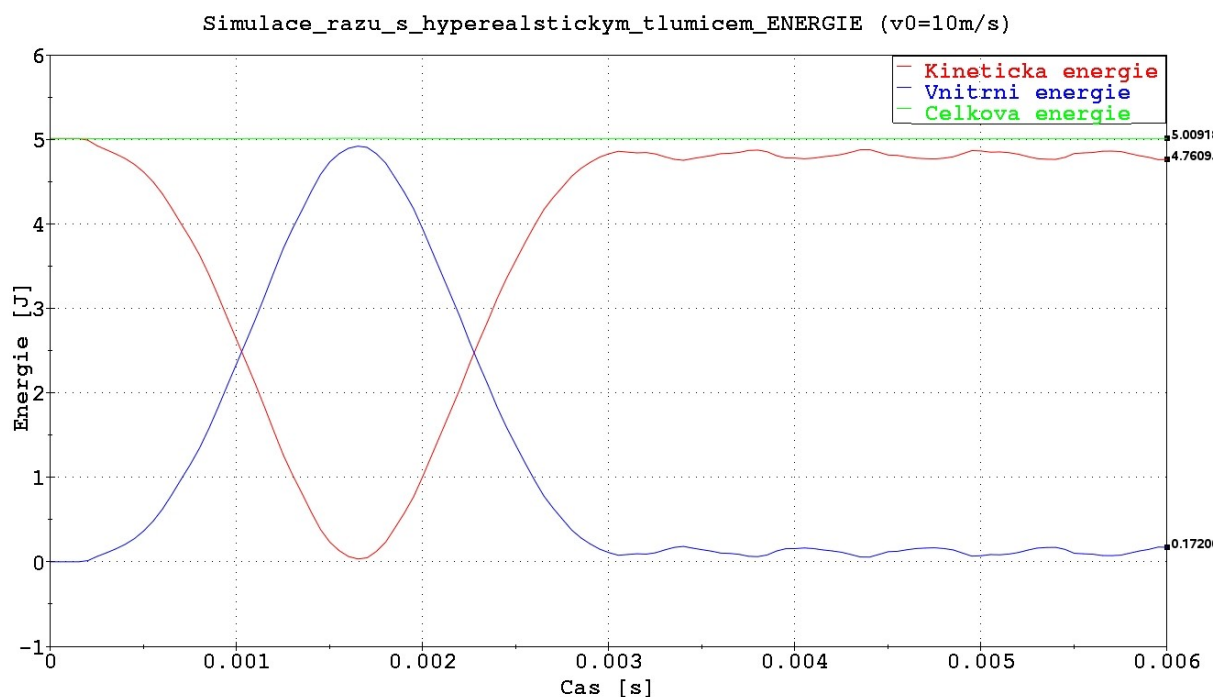
Cílem, kterého má být dosaženo v této kapitole je vytvoření výpočtového modelu napěťově deformačního chování tlumičů rázu z hyperelastických a plastických materiálů v systému PAM-CRASH.

### 9.2.1 Výpočtový model hyperelastického tlumiče v systému PAM-CRASH

Jako model materiálu pro model hyperelastického tlumiče v systému PAM-CRASH bude použito modelu materiálu popsaného v kapitole 5.2.2 této práce, tedy materiál type 37. Pro posouzení věrohodnosti modelu, a jako jeden z možných ukazatelů špatně zadaných parametrů modelu do systému MKP se ukázalo vhodné vykreslit průběhy energií při simulaci rázového děje. Tyto jsou pro hyperelastický tlumič zobrazeny na obrázcích 8.3 a 8.4. Kde na obrázku 8.3 je průběh energií pro rázový děj, kde počáteční rychlost tělesa byla 5m/s, na obrázku 8.4 je totéž pro počáteční rychlost 10m/s.

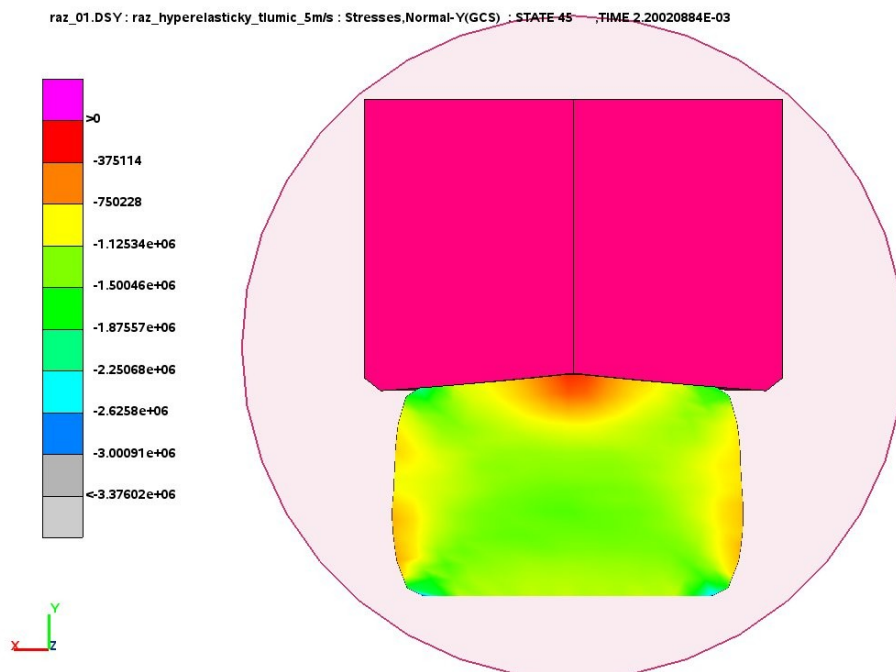


Obrázek 8.3 průběh energií při modelování rázu tělesa s hyperelastickým tlumičem pro počáteční rychlost 5m/s.

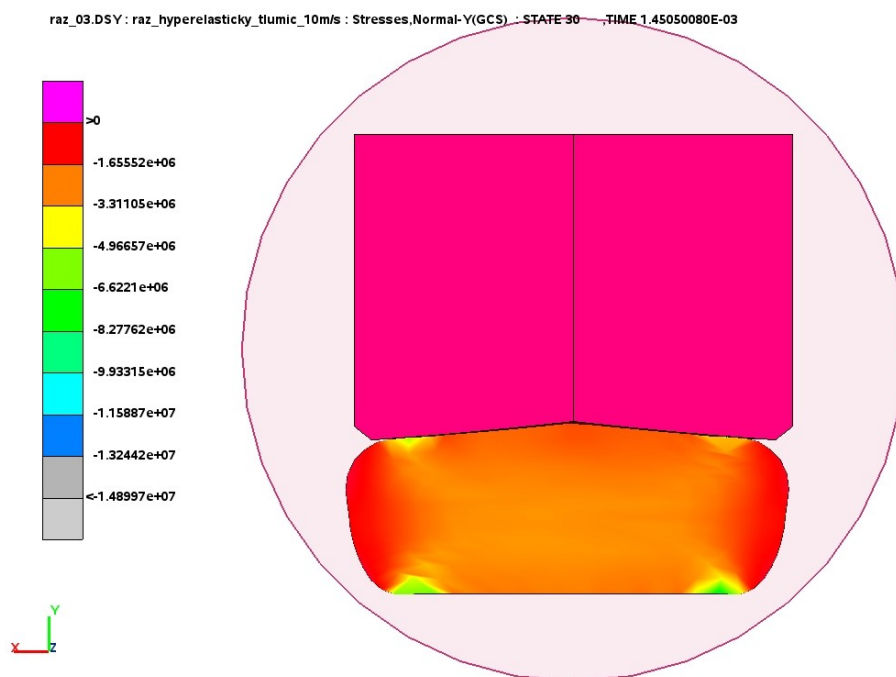


Obrázek 8.4 průběh energií při modelování rázu tělesa s hyperelastickým tlumičem pro počáteční rychlost 10m/s.

Deformované geometrie a vykreslené průběhy napětí ve směru rázu jsou na obrázcích 8.5 a 8.6 kde na obrázku 8.5 je stav odpovídající počáteční rychlosti 5m/s a na obrázku 8.6 je stav odpovídající počáteční rychlosti 10m/s.



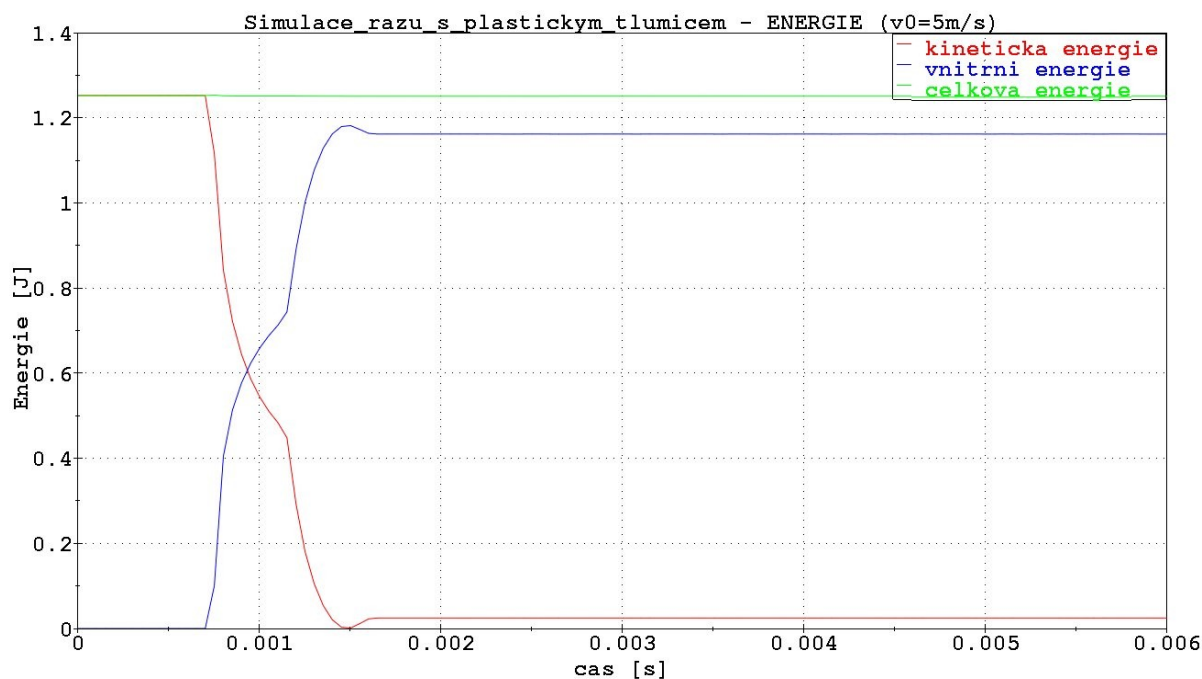
Obrázek 8.5 Deformovaná konfigurace a napětí ve směru rázu pro počáteční rychlost 5m/s.



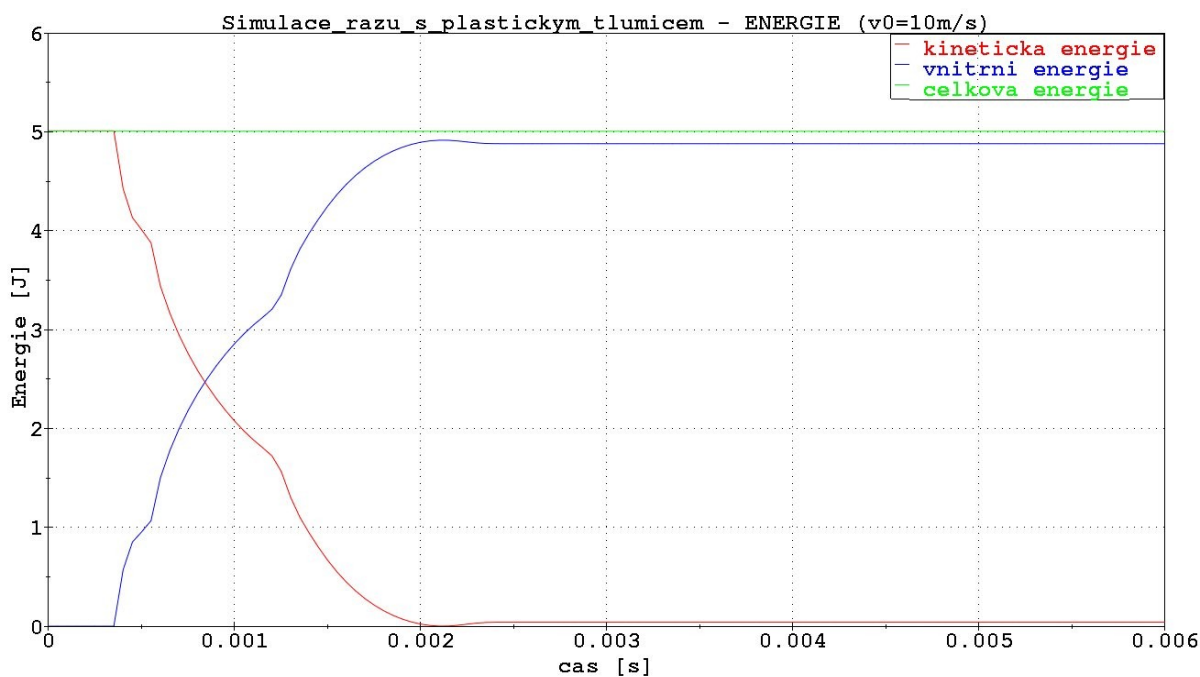
Obrázek 8.6 Deformovaná konfigurace a napětí ve směru rázu pro počáteční rychlost 10m/s.

## 9.2.2 Výpočtový model plastického tlumiče v systému PAM-CRASH

Pro vytvoření modelu chování plastického materiálu bude použito modelu materiálu type 103, popsaného v kapitole 7.1.2 této práce. Pro posouzení věrohodnosti modelu budou opět vykresleny průběhy energií během zkoušky (obrázky 8.7 a 8.8).

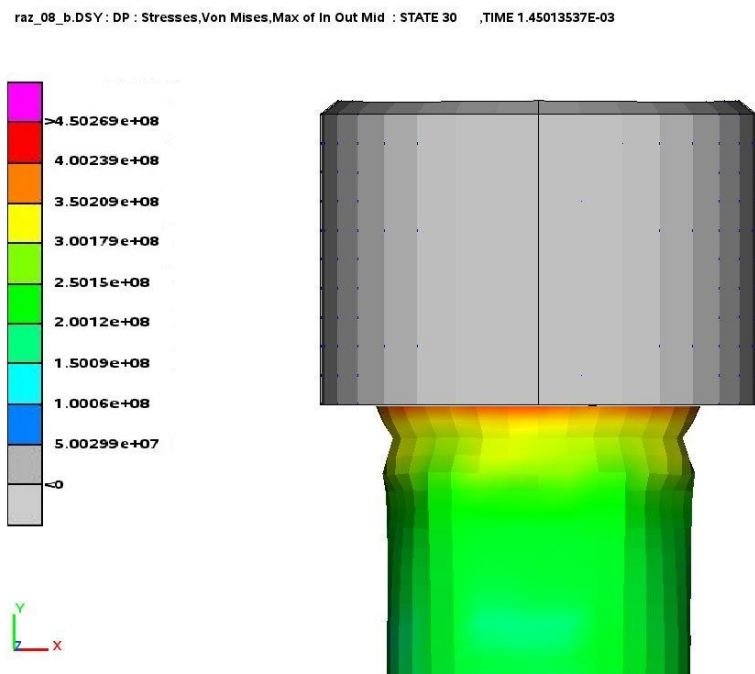


Obrázek 8.7 průběh energií při modelování rázu tělesa s plastickým tlumičem pro počáteční rychlost 5m/s.

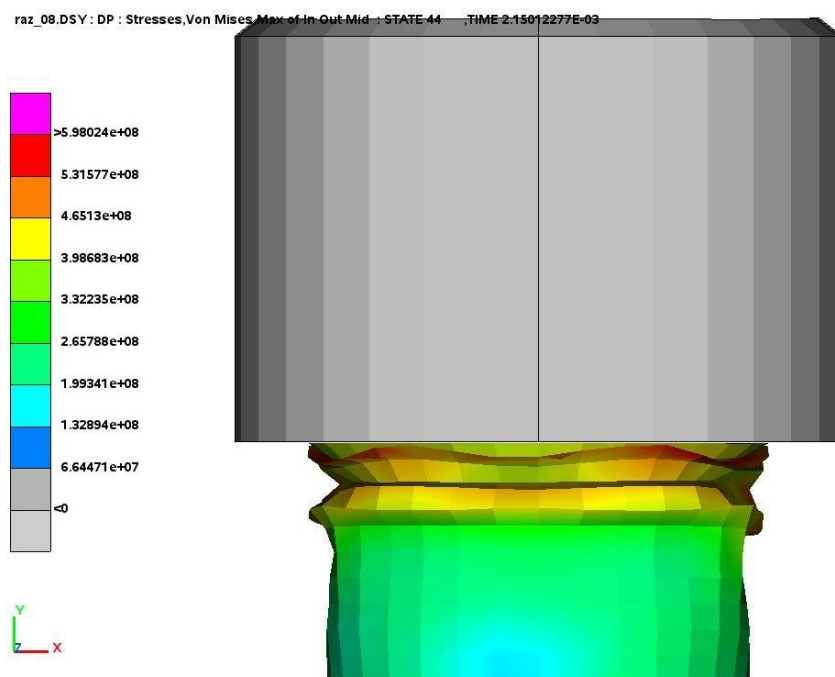


Obrázek 8.8 průběh energií při modelování rázu tělesa s plastickým tlumičem pro počáteční rychlost 10m/s.

Deformované geometrie a vykreslené průběhy redukovaných napětí (VonMises) jsou na obrázcích 8.9 a 8.10 kde na obrázku 8.9 je stav odpovídající počáteční rychlosti 5m/s a na obrázku 8.10 je stav odpovídající počáteční rychlosti 10m/s.



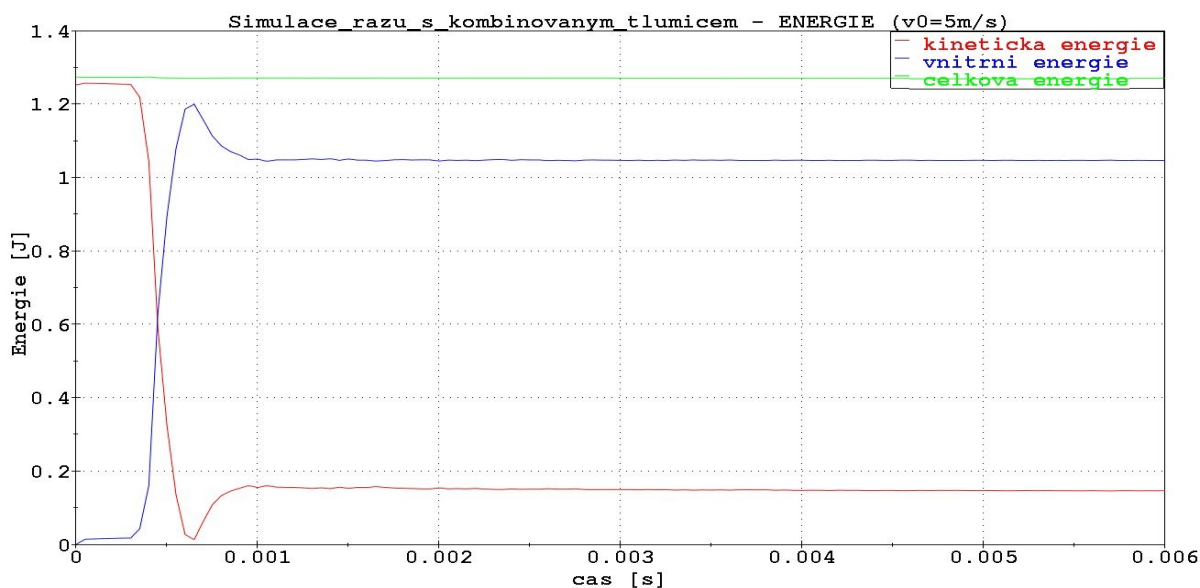
Obrázek 8.9 Deformovaná konfigurace a redukované napětí pro počáteční rychlost 5m/s.



Obrázek 8.10 Deformovaná konfigurace a redukované napětí pro počáteční rychlost 10m/s.

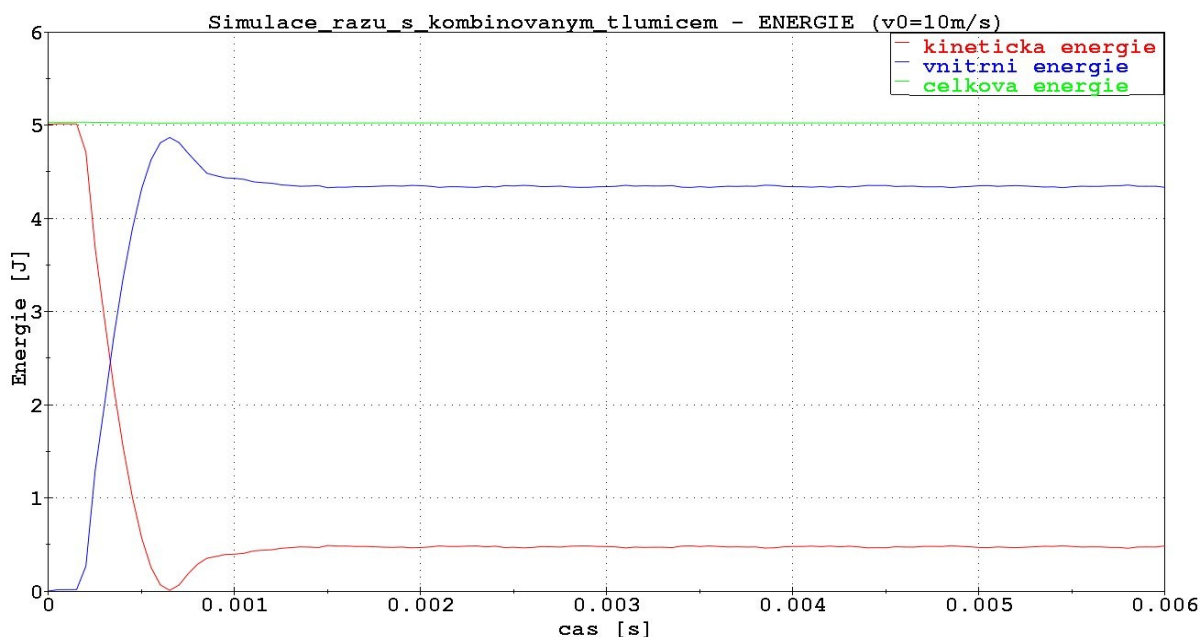
### 9.2.3 Výpočtový model tlumiče s kombinací dvou materiálů v systému PAM-CRASH

Při tvorbě výpočtového modelu tlumiče rázu s kombinací plastického a hyperelastického materiálu byly použity dva modely materiálu. Pro plastický to byl materiál Type 103 a pro hyperelastický materiál to byl materiál type 37, tedy oba materiály s předchozími dvěma kapitolami. Podobně jako v předchozích případech budou vyhodnoceny průběhy energií v průběhu simulace rázu (obrázek 8.11 a 8.12)



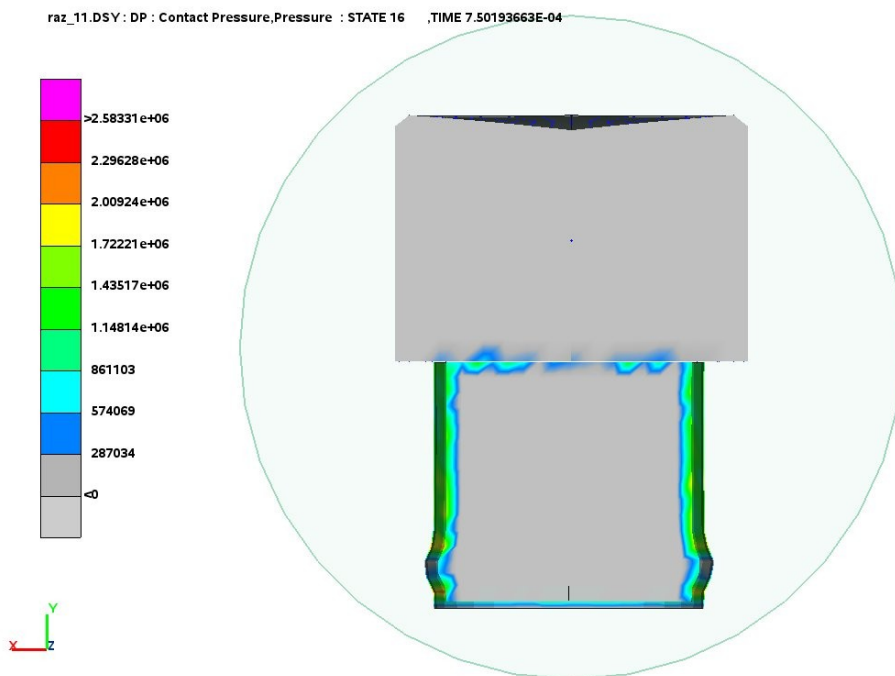
Obrázek 8.11 průběh energií při modelování rázu tělesa s tlumičem kombinací dvou materiálů pro počáteční rychlost 5m/s.



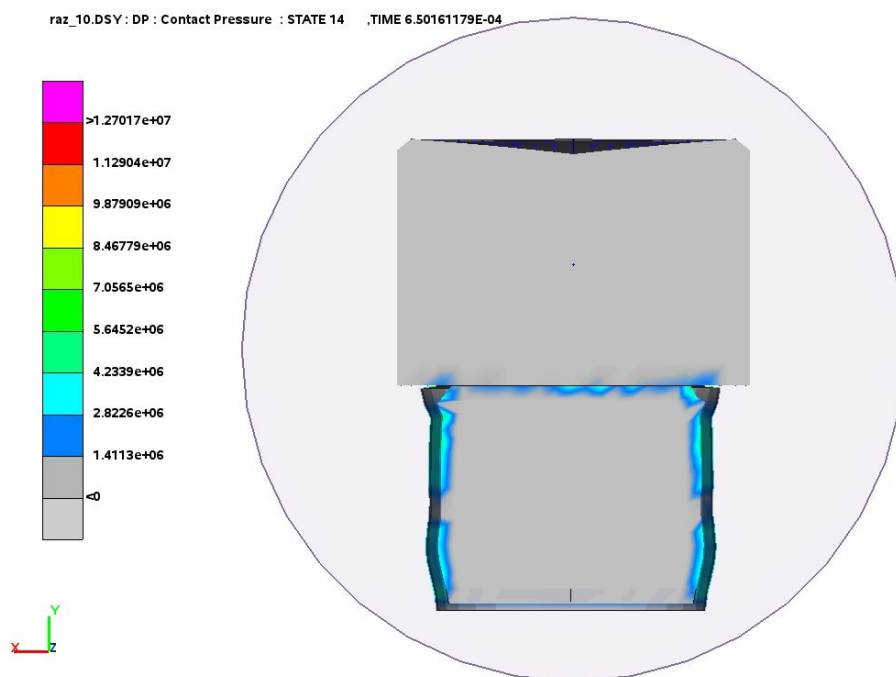


Obrázek 8.12 průběh energií při modelování rázu tělesa s tlumičem z kombinace dvou materiálů pro počáteční rychlost  $10\text{m/s}$

Deformovaná geometrie je znázorněna na obrázcích 8.13 pro počáteční rychlost  $5\text{m/s}$  a na obrázku 8.14 je deformovaná geometrie pro počáteční rychlost  $10\text{m/s}$ . Veličina, která je na těchto obrázcích vykreslena je kontaktní tlak.



Obrázek 8.13 Deformovaná konfigurace a kontaktní tlak pro počáteční rychlost  $5\text{m/s}$ .



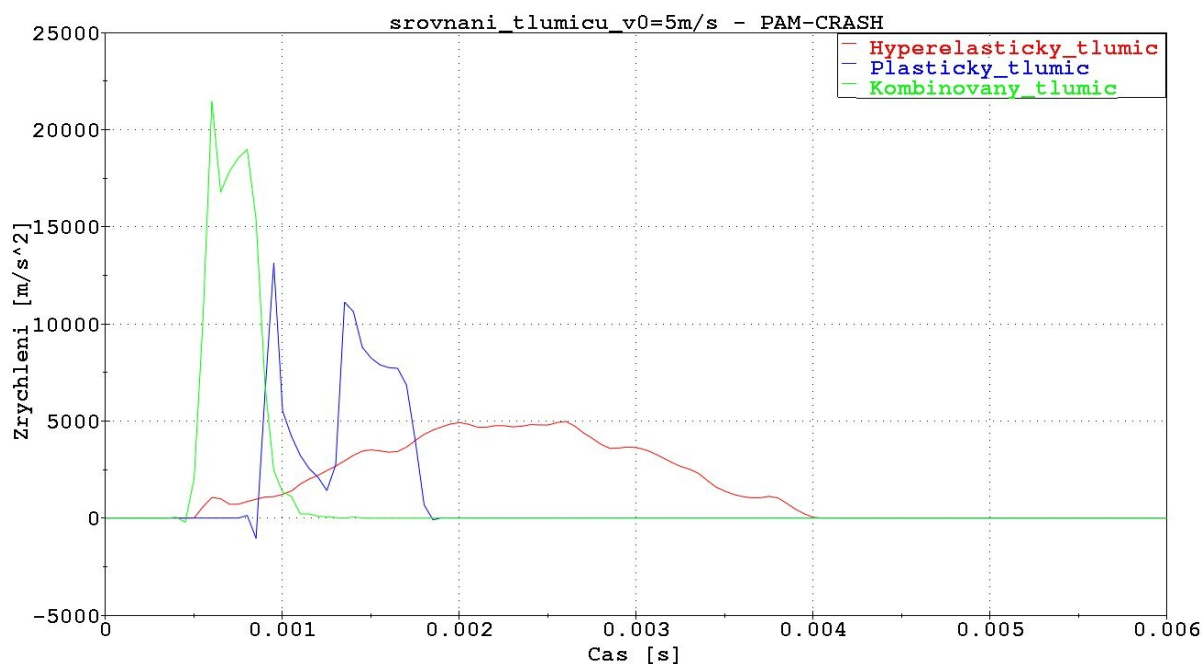
Obrázek 8.14 Deformovaná konfigurace a kontaktní tlak pro počáteční rychlost 5m/s.

#### 9.2.4 Srovnání chování jednotlivých modelů tlumičů v systému PAM-CRASH

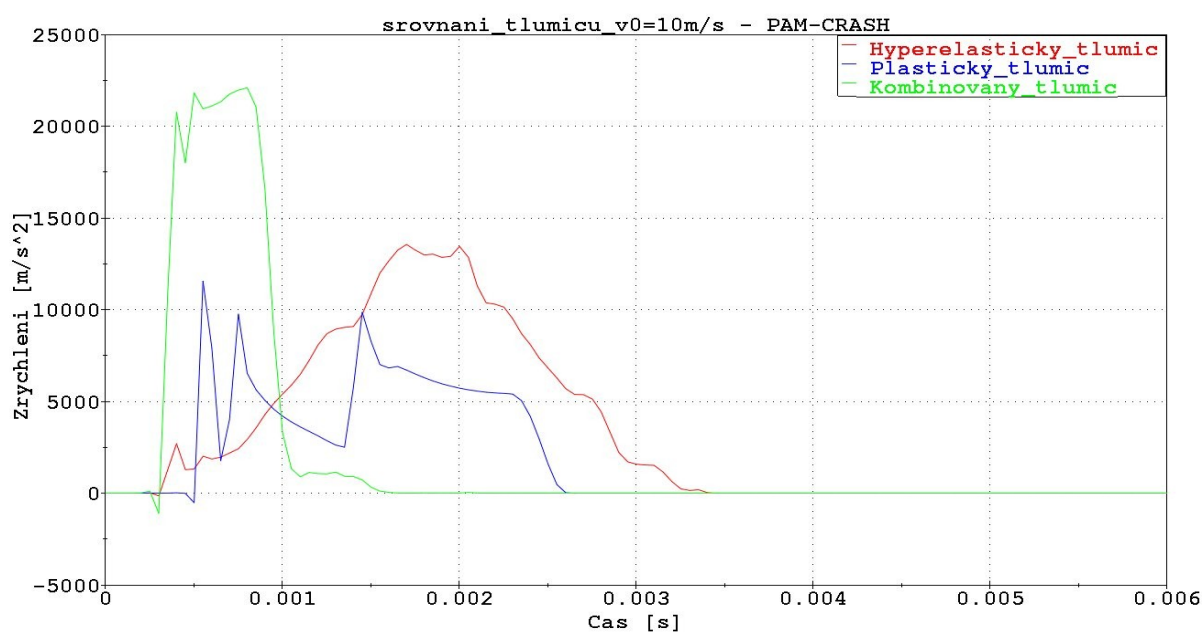
Veličina, která bude použita pro srovnání chování modelů jednotlivých modelů tlumičů bude zrychlení pohybujícího se tělesa, které do tlumiče narazí. Předpoklad je takový, že zrychlení tuhého tělesa je podle druhého Newtonova zákona (8.1) úměrné síle, kterou působí tlumič na těleso.

$$F_{tlumič} = m_{těleso} * a_{těleso} \quad (8.1)$$

Pro modely jednotlivých provedení tlumičů byly počáteční rychlosti tělesa 5m/s resp. 10m/s získané hodnoty zrychlení tělesa prezentované na obrázku 8.15 resp. 8.16.



Obrázek 8.15 srovnání jednotlivých provedení tlumičů pro počáteční rychlost 5m/s



Obrázek 8.16 srovnání jednotlivých provedení tlumičů pro počáteční rychlost 10m/s

Z průběhů energií při simulacích a z průběhu zrychlení tělesa lze vyvodit následující poznatky:

**Celková energie** se během simulace nemění

**Kinetická energie** má v počátku své maximum, při kontaktu s tlumičem začne klesat až na nulu, dojde k zastavení tělesa. Poté začne stoupat. V závislosti na použitém typu tlumiče stoupá do určité meze.

Pro hyperelastický tlumič se vrátí téměř na počáteční hodnotu. Téměř, a ne úplně na počáteční hodnotu proto, že určitá malá část energie se spotřebuje při tření v kontaktu.

Pro plastický tlumič je ustálená hodnota kinetická energie po rázu značně nižší, než u hyperelastického tlumiče. Toto je v souladu s očekáváním, plastický tlumič ve své podstatě není schopen takových vratných deformací. Ustálená hodnota kinetické energie po rázu je dána elastickou deformací tlumiče a u plastického tlumiče převládají deformace plastické.

Pro tlumič s kombinace obou materiálu je ustálená hodnota kinetické energie po rázu značně nižší, než u tlumiče hyperelastického, je však vyšší než u tlumiče plastického.

**Vnitřní energie** je pro všechny provedení tlumičů v počátečním stavu až do rázu nulová.

U hyperelastického tlumiče se její hodnota po rázu ustálí na hodnotě blízké nule.

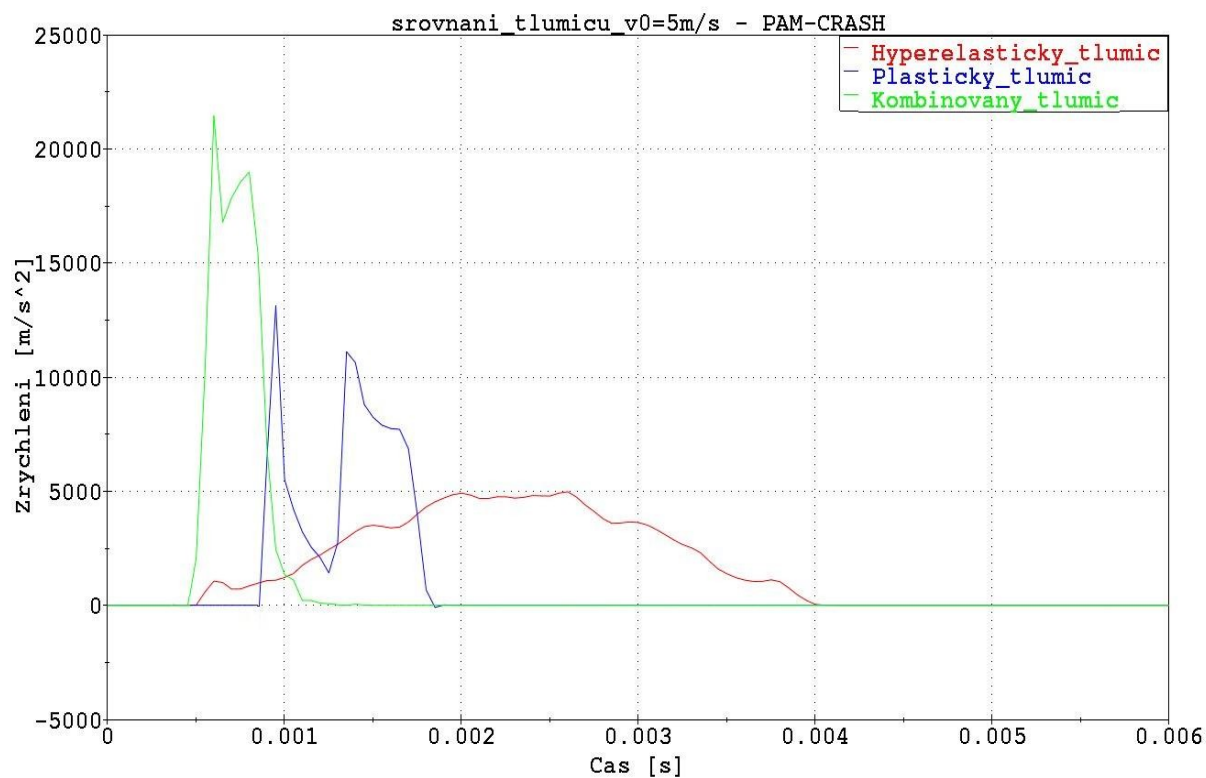
U plastického tlumiče ustálená hodnota vnitřní energie dosahuje hodnot vyšších, někdo skoro až téměř rovných hodnotám počáteční kinetické energie. V takovémto případě dochází k absorpci energie, kde se kinetická energie mění v energii napjatosti vzniklou při plastické deformaci.

U kombinovaného tlumiče je průběh vnitřní energie mezi průběhy pro hyperelastickou a plastickou variantu.

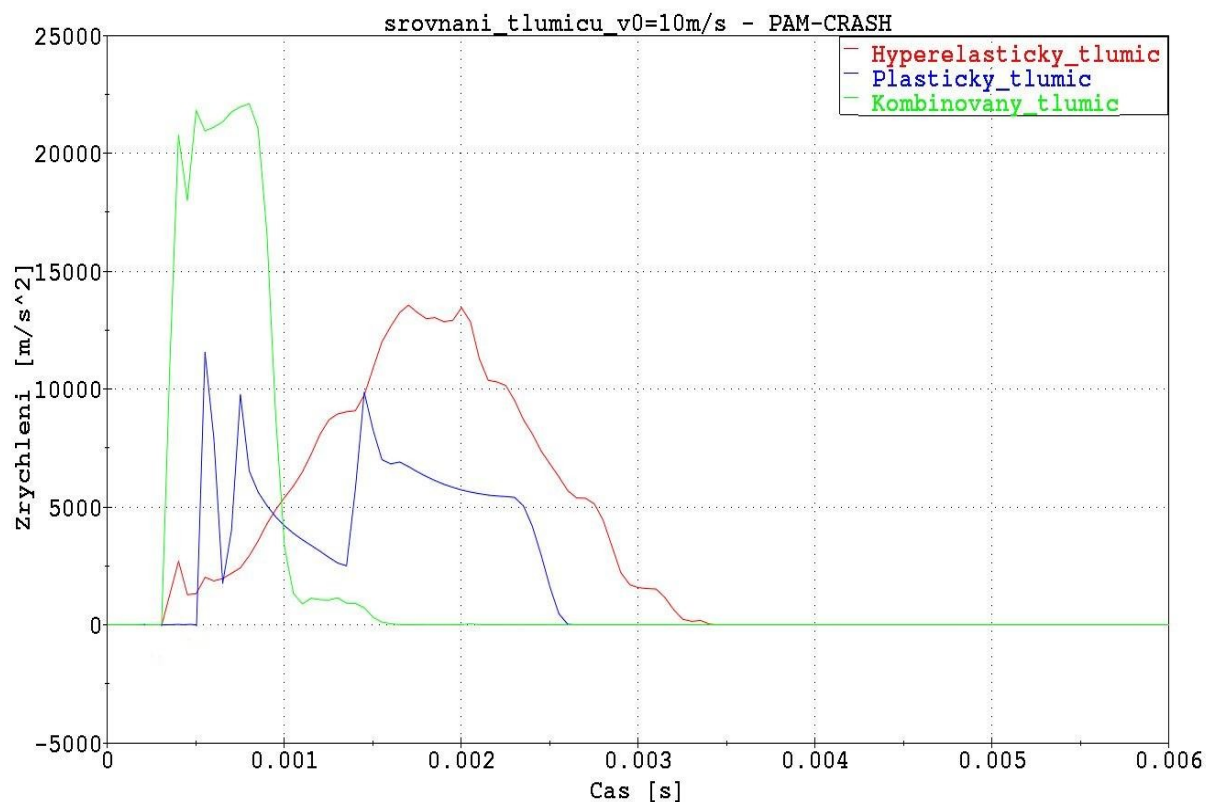
## **Zrychlení**

Zrychlení tuhého tělesa je pro všechny varianty tlumiče vykresleno na obrázcích 8.17 a 8.18. Kde na obrázku 8.17 jsou průběhy zrychlení pro počáteční rychlost 5m/s a na obrázku 8.18 jsou průběhy zrychlení tuhého tělesa pro počáteční rychlost 10m/s.

Z obrázků je zřejmé, že pro hyperelastický tlumič je hodnota maximálního zrychlení nejnižší. Průběh zrychlení má jednu maximální hodnotu, tato představuje maximálně deformovaný stav tlumiče, kdy dojde k zastavení tělesa. Je také zřejmé, že samotný ráz a vzájemné působení tělesa a tlumiče probíhají v delším čase. V kratším čase probíhá děj u plastického tlumiče, kde je hodnota maximálního zrychlení vyšší než u hyperelastického tlumiče. Průběh zrychlení u plastického tlumiče má dvě maxima. První popisuje první část rázu, následnou deformaci až po ztrátu stability. Po této deformaci vznikne nova stabilní konfigurace, která je stabilní, tato se deformuje až do ztráty stability druhé konfigurace. Nekratší je pak ráz do tlumiče s kombinace obou materiálů, kdy hodnota maximálního zrychlení je skoro dvojnásobná oproti hodnotě zrychlení u tlumiče plastického. Průběh tohoto zrychlení má opět dvě maxima. První představuje okamžik ztráty stability plastického obalu tlumiče a druhé pak vzniká při spojené deformaci plastického a hyperelastického tlumiče.



8.17 srovnání jednotlivých provedení tlumičů rázu při počáteční rychlosti 5m/s



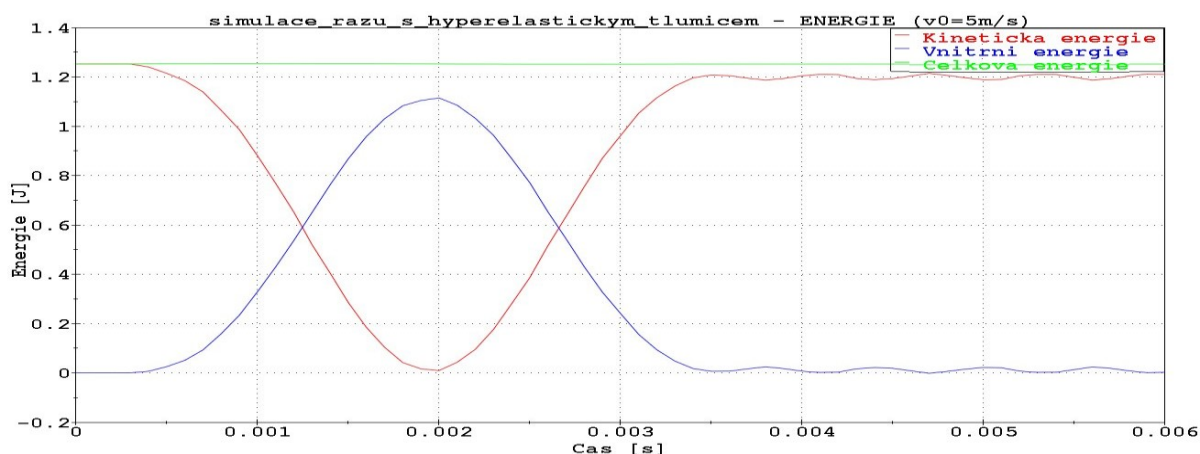
8.18 srovnání jednotlivých provedení tlumičů rázu při počáteční rychlosti 10m/s

## 8.3 Výpočtové modely v systému LS-DYNA

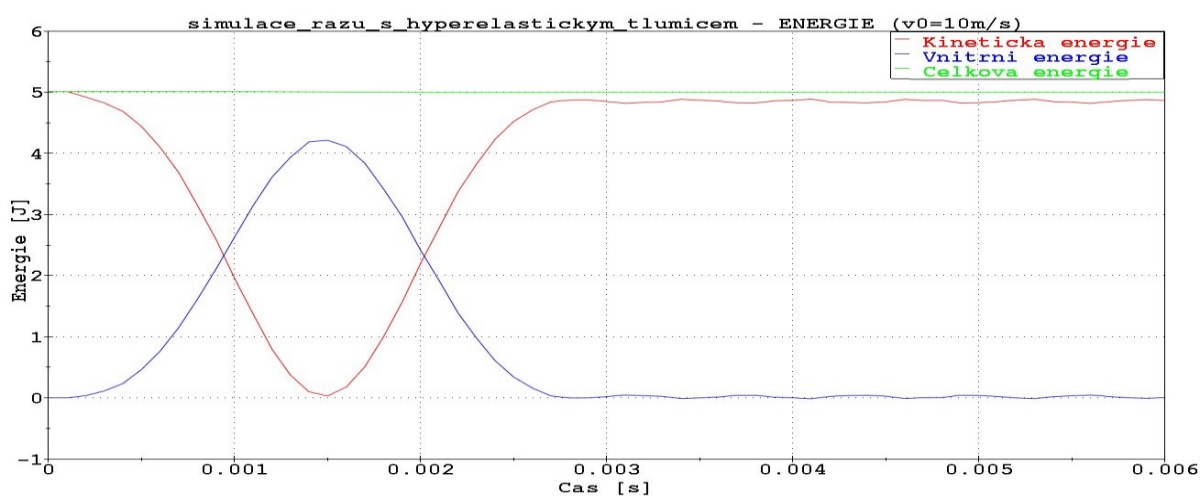
Cílem, kterého má být dosaženo v této kapitole je vytvoření výpočtového modelu napěťově deformačního chování tlumičů rázu z hyperelastických a plastických materiálů v systému LS-DYNA

### 8.3.1 Výpočtový model hyperelastického tlumiče v systému LS-DYNA

Jako model materiálu pro model hyperelastického tlumiče v systému PAM-CRASH bude použito modelu materiálu popsaného v kapitole 5.3.2 této práce, tedy materiál Hyperelastic-rubber. Pro posouzení věrohodnosti modelu, a jako jeden z možných ukazatelů špatně zadaných parametrů modelu do systému MKP se ukázalo vhodné vykreslit průběhy energií při simulaci rázového děje. Tyto jsou pro hyperelastický tlumič zobrazeny na obrázcích 8.19 a 8.20. Kde na obrázku 8.19 je průběh energií pro rázový děj, kde počáteční rychlost tělesa byla 5m/s, na obrázku 8.20 je totéž pro počáteční rychlost 10m/s.

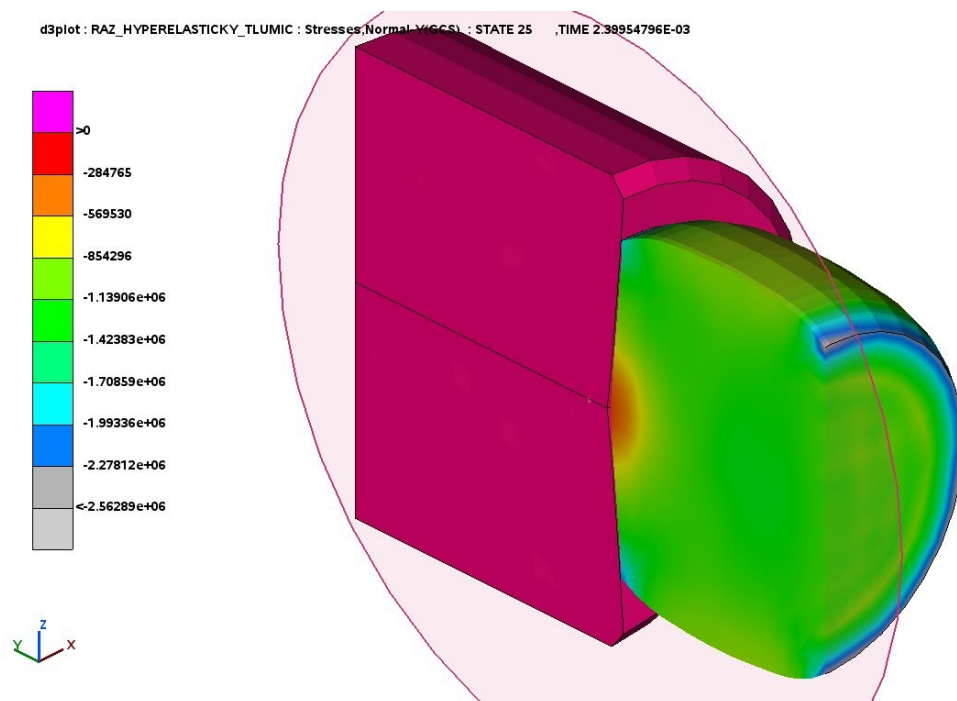


Obrázek 8.19 průběh energií při modelování rázu tělesa s hyperelastickým tlumičem pro počáteční rychlost 5m/s.

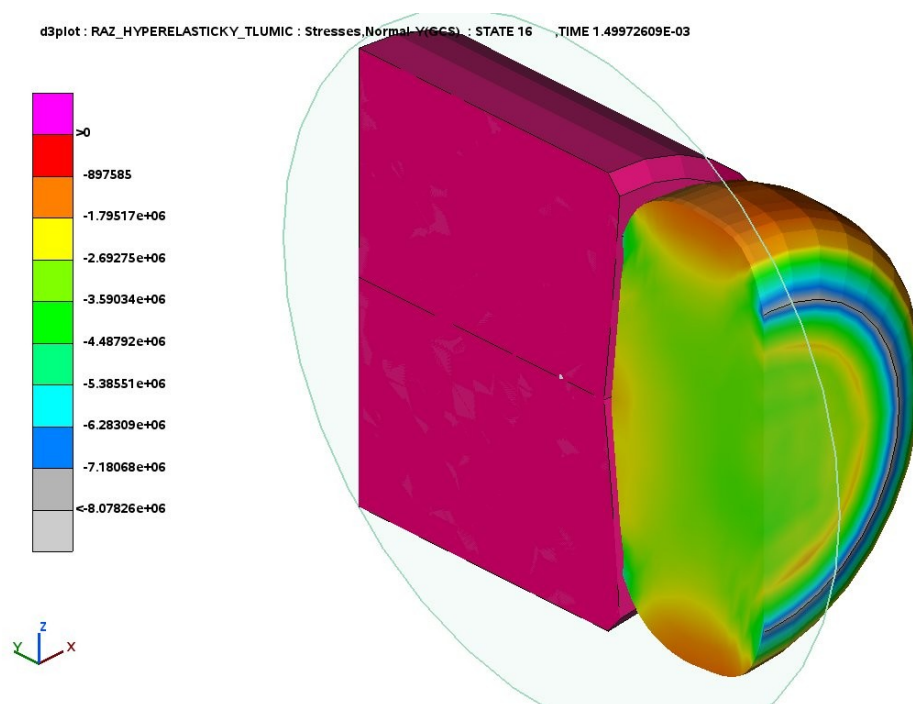


Obrázek 8.20 průběh energií při modelování rázu tělesa s hyperelastickým tlumičem pro počáteční rychlost 10m/s.

Deformované geometrie a vykreslené průběhy napětí ve směru rázu jsou na obrázcích 8.21 a 8.22 kde na obrázku 8.21 je stav odpovídající počáteční rychlosti 5m/s a na obrázku 8.21 je stav odpovídající počáteční rychlosti 10m/s.



Obrázek 8.21 Deformovaná konfigurace a napětí ve směru rázu pro počáteční rychlost 5m/s.

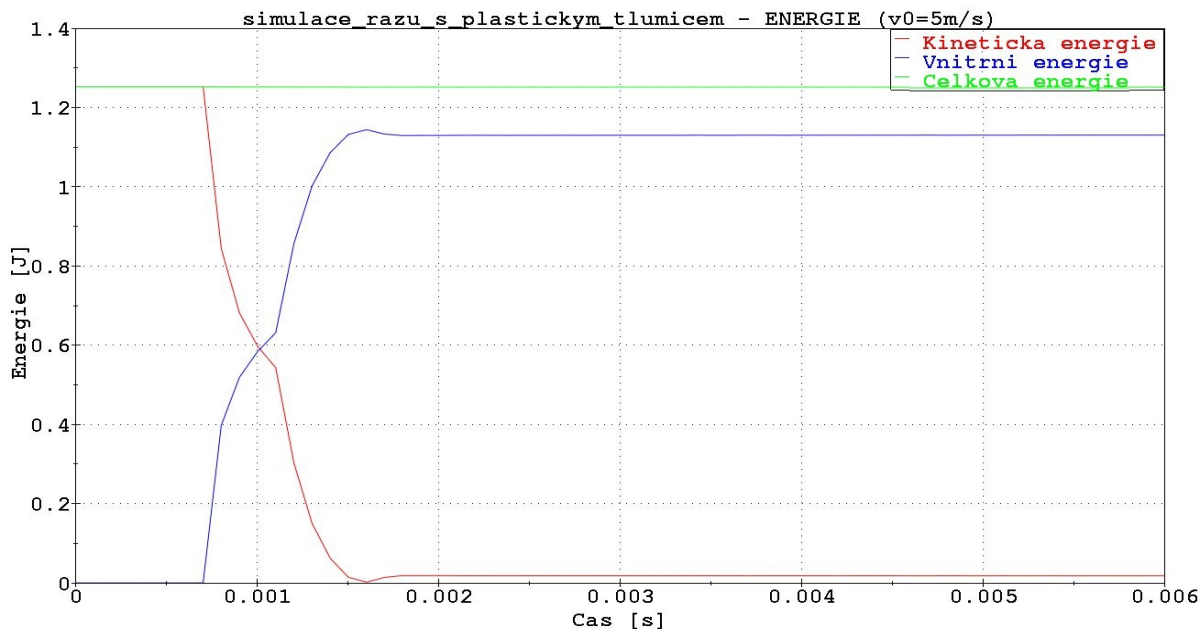


Obrázek 8.21 Deformovaná konfigurace a napětí ve směru rázu pro počáteční rychlost 5m/s.

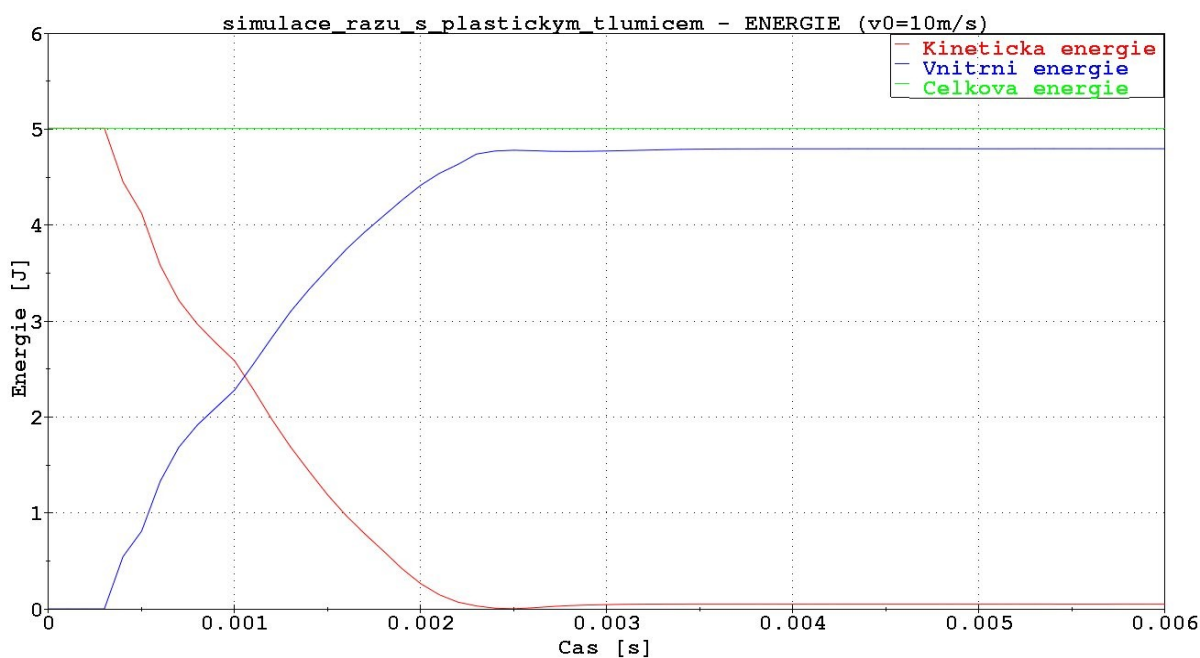


### 8.3.2 Výpočtový model plastického tlumiče v systému LS-DYNA

Pro vytvoření modelu chování plastického materiálu bude použito modelu materiálu Plastic\_kinematic, popsaného v kapitole 5.3.2 této práce. Pro posouzení věrohodnosti modelu budou opět vykresleny průběhy energií během zkoušky (obrázky 8.22 a 8.23).



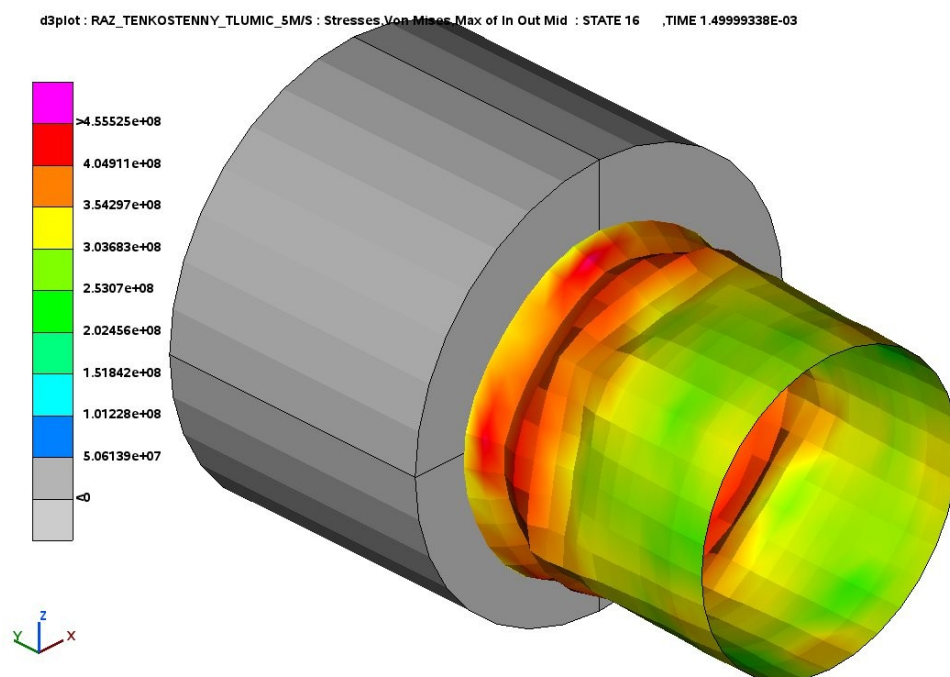
Obrázek 8.22 průběh energií při modelování rázu tělesa s plastickým tlumičem pro počáteční rychlost 5m/s.



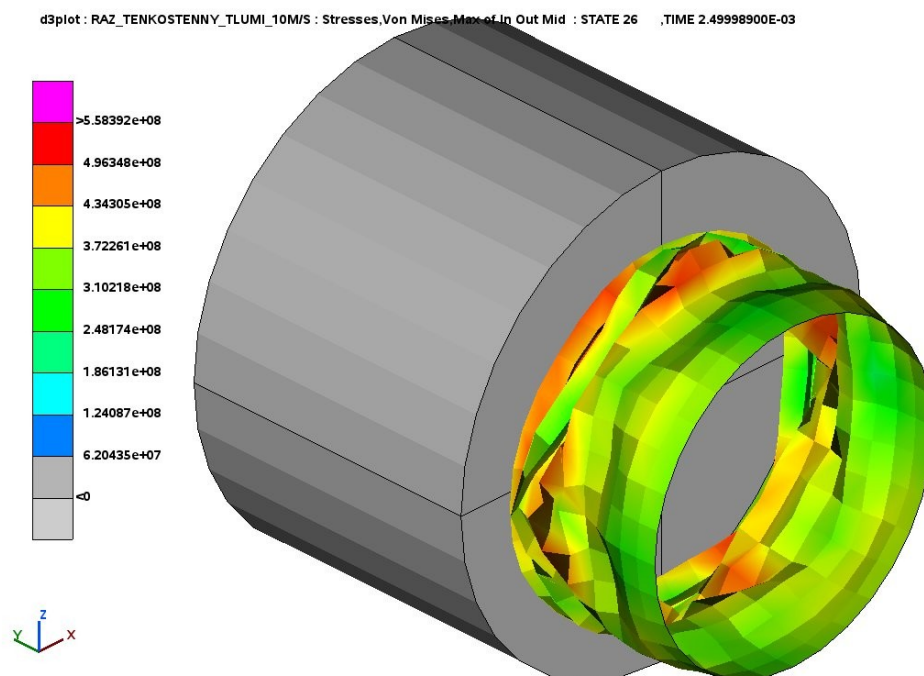
Obrázek 8.23 průběh energií při modelování rázu tělesa s plastickým tlumičem pro počáteční rychlost 10m/s.



Deformované geometrie a vykreslené průběhy redukovaných napětí (VonMises) jsou na obrázcích 8.24 a 8.25 kde na obrázku 8.24 je stav odpovídající počáteční rychlosti 5m/s a na obrázku 8.25 je stav odpovídající počáteční rychlosti 10m/s.



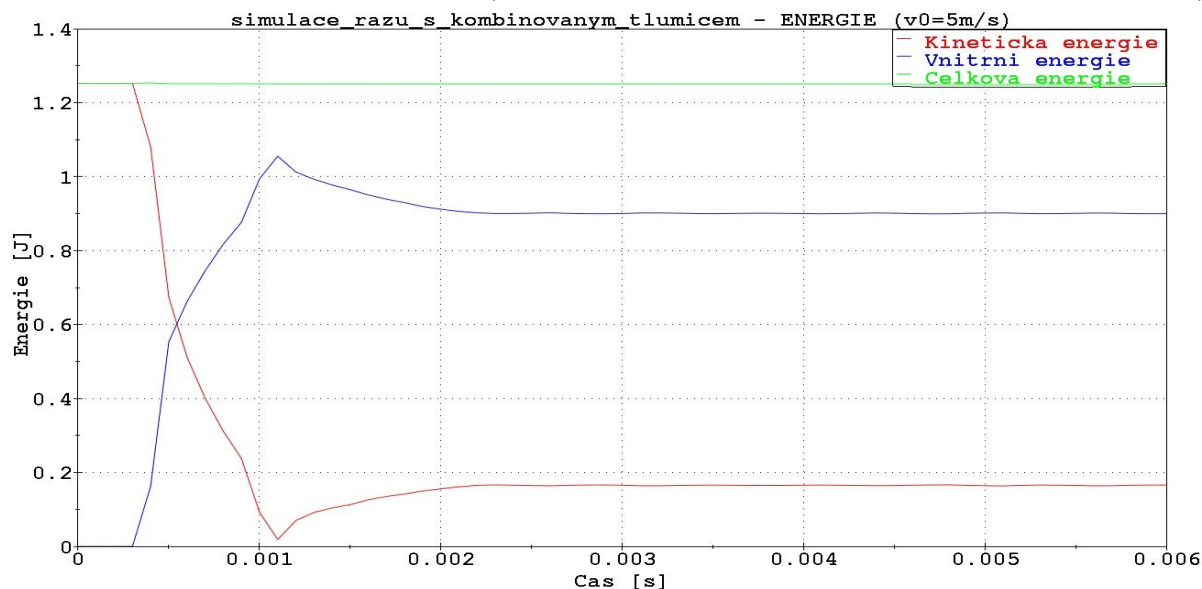
Obrázek 8.24 Deformovaná konfigurace a redukované napětí pro počáteční rychlost 5m/s.



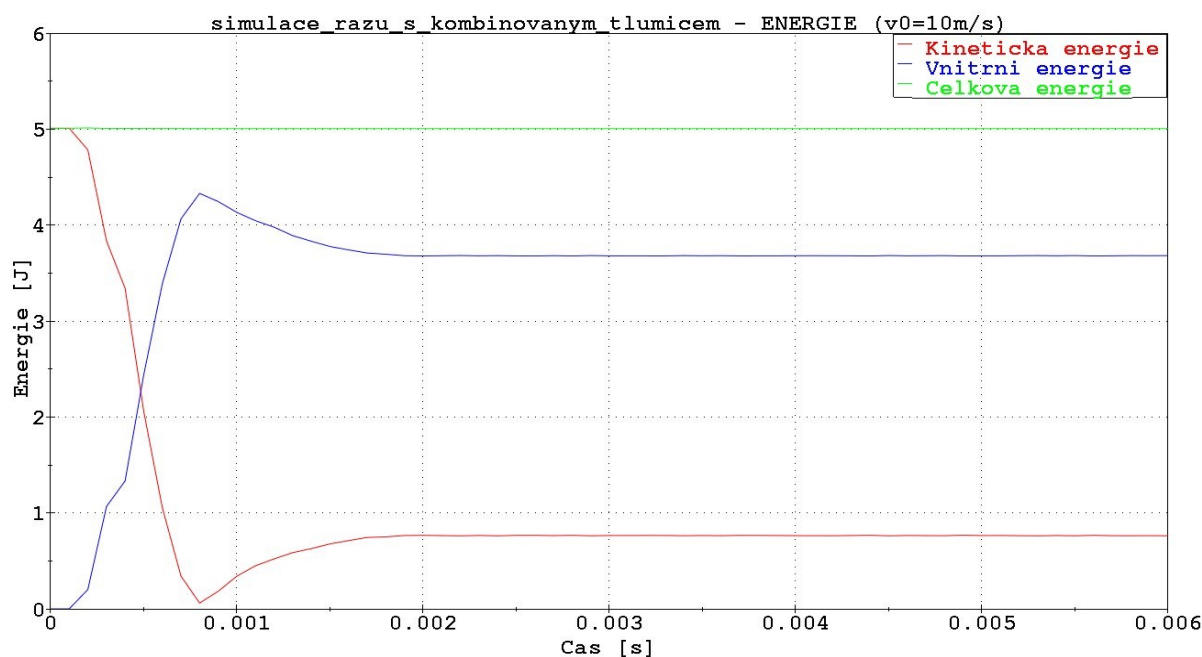
Obrázek 8.25 Deformovaná konfigurace a redukované napětí pro počáteční rychlost 10m/s.

### 8.3.3 Výpočtový model tlumiče s kombinací dvou materiálů v systému LS-DYNA

Při tvorbě výpočtového modelu tlumiče rázu s kombinací plastického a hyperelastického materiálu v systému LS-DYNA byly použity dva modely materiálu. Pro plastický to byl materiál PLASTIC\_KINEMATIC a pro hyperelastický materiál to byl materiál HYPERELASTIC\_RUBBER, tedy oba materiály s předchozích dvou kapitol. Podobně jako v předchozích případech budou vyhodnoceny průběhy energií v průběhu simulace rázu (obrázek 8.26 a 8.27)

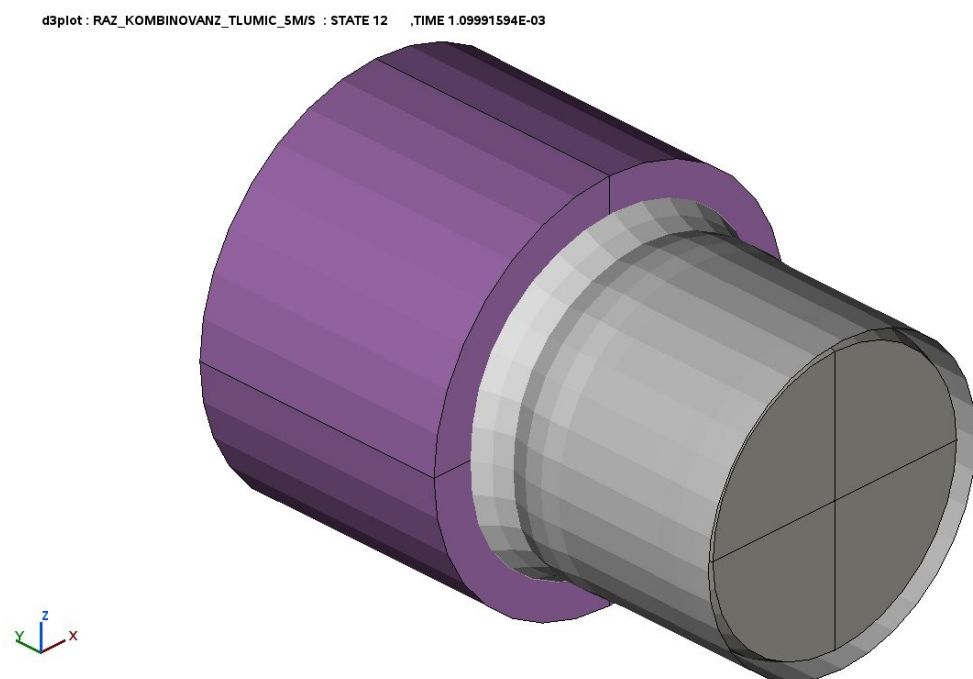


Obrázek 8.26 průběh energií při modelování rázu tělesa s tlumičem z kombinace dvou materiálů pro počáteční rychlost 5m/s.

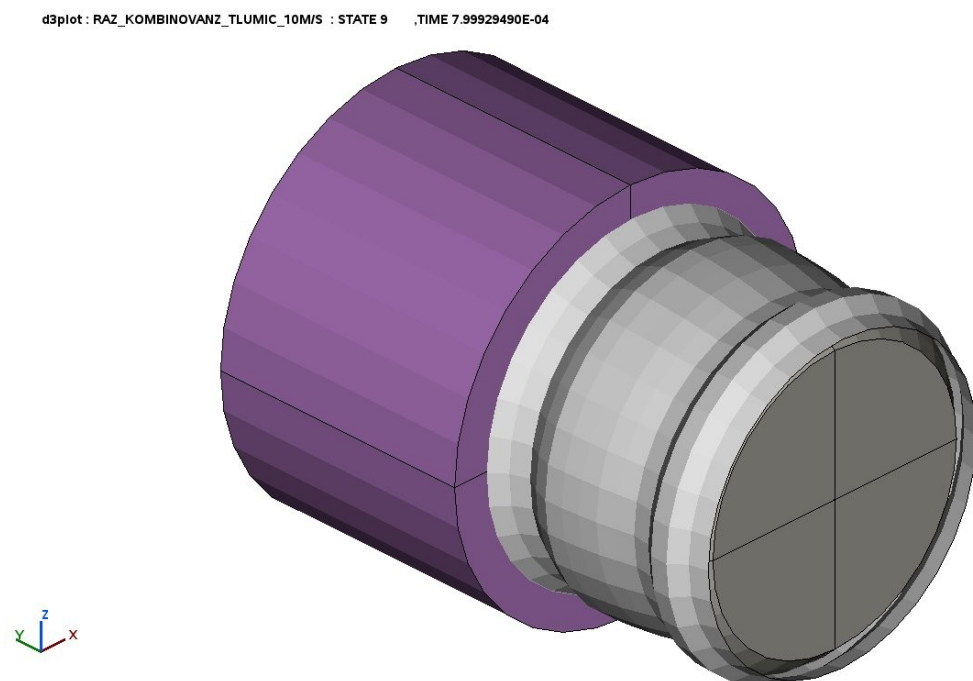


Obrázek 8.27 průběh energií při modelování rázu tělesa s tlumičem z kombinace dvou materiálů pro počáteční rychlost 10m/s.

Deformovaná geometrie je znázorněna na obrázcích 8.28 pro počáteční rychlost 5m/s a na obrázku 8.29 pro počáteční rychlost 10m/s



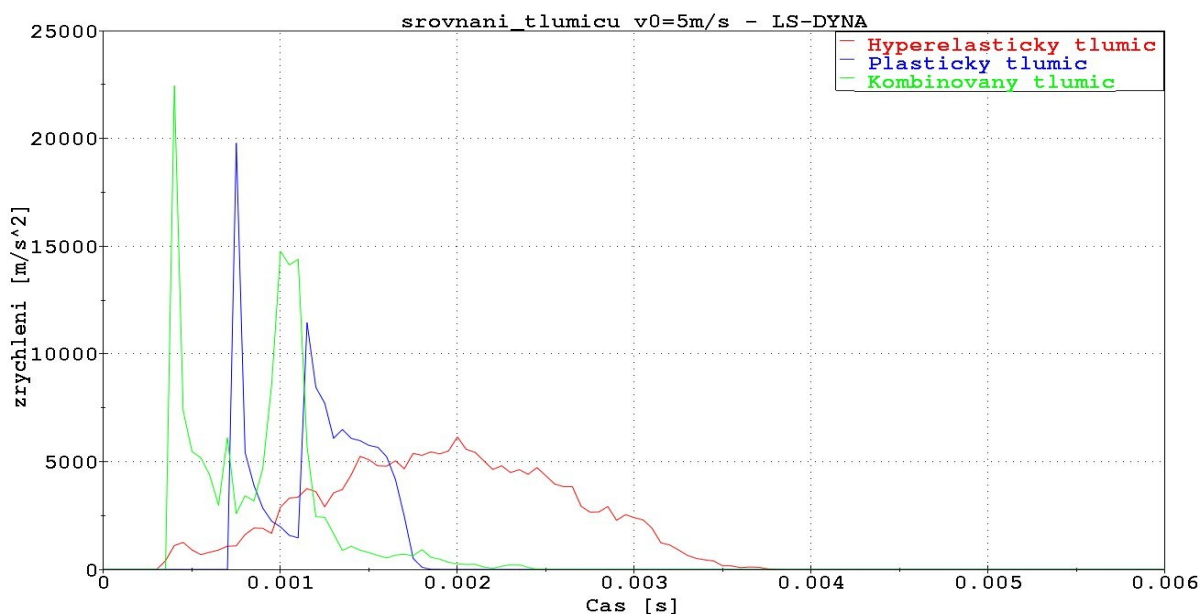
*Obrázek 8.28 Deformovaná konfigurace pro počáteční rychlost 5m/s.*



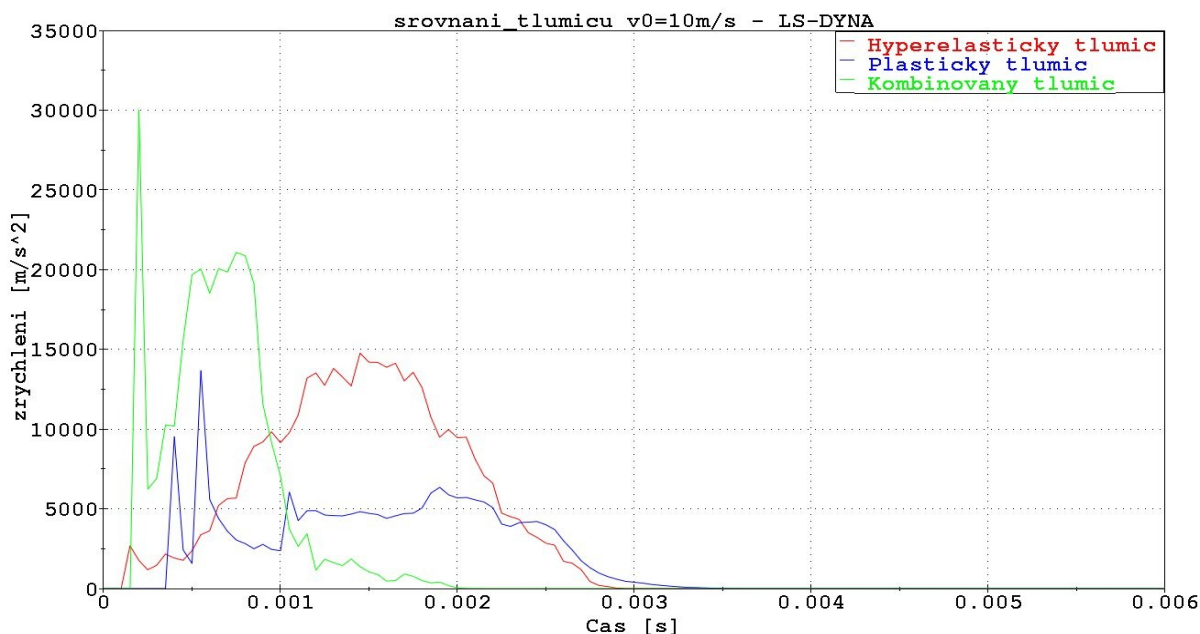
*Obrázek 8.29 Deformovaná konfigurace pro počáteční rychlost 5m/s.*

### 8.3.4 Srovnání chování jednotlivých modelů tlumičů v systému LS-DYNA

Pro porovnání chování jednotlivých provedení tlumičů, přesněji jejich výpočtových modelů bude použito průběhů zrychlení tuhého tělesa. Předpoklady budou stejné jako v kapitole 8.2.4. Průběhy zrychlení tlumičů jsou znázorněny na obrázcích 8.30 pro počáteční rychlost 5m/s a na obrázku 8.31 pro počáteční rychlost 10m/s.



8.30 srovnání jednotlivých provedení tlumičů rázu při počáteční rychlosti 5m/s



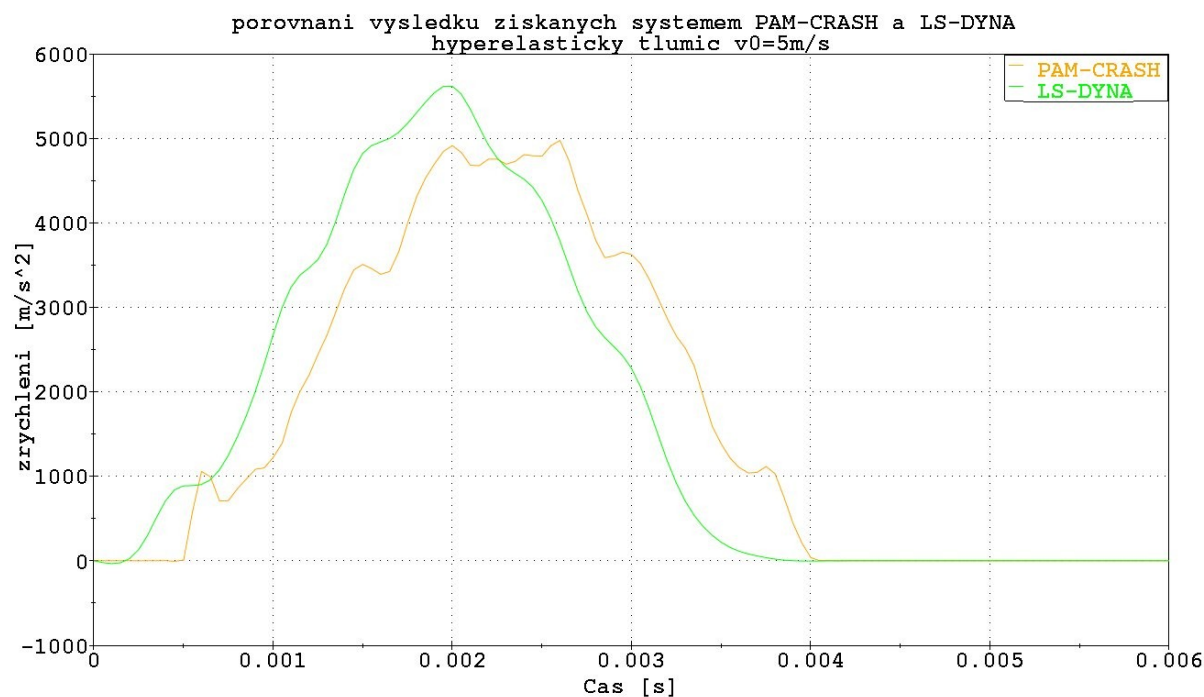
8.31 srovnání jednotlivých provedení tlumičů rázu při počáteční rychlosti 10m/s

Výsledky získané v systému LS-DYNA jsou podobné jako výsledky získané v systému PAM-CRASH. Lze je tedy interpretovat stejným způsobem, viz. kapitola 8.2.4.

## 8.4 Porovnání výsledků při modelování v programech PAM-CRASH a LS-DYNA

V této kapitole budou srovnány výsledky získané pomocí výpočtového modelování pomocí dvou komerčních, konkurenčních programů. Je důležité upozornit na fakt, že se zde v žádném případě nejedná o porovnání možností těchto programů, ale o porovnání schopnosti autora této práce při používání těchto programů. Vzhledem k různým zkušenostem s prací s jednotlivými programy a vzhledem k neexistenci experimentálních dat je těžké posoudit, zda a které výsledky jsou blíže k realitě. Vzhledem k vyšší úrovni zkušeností autora s prací v systému PAM-CRASH jsou výsledky získané v systému PAM-CRASH považovány za věrohodnější.

**Pro hyperelastický tlumič a počáteční rychlost 5m/s byly získány tyto výsledky**

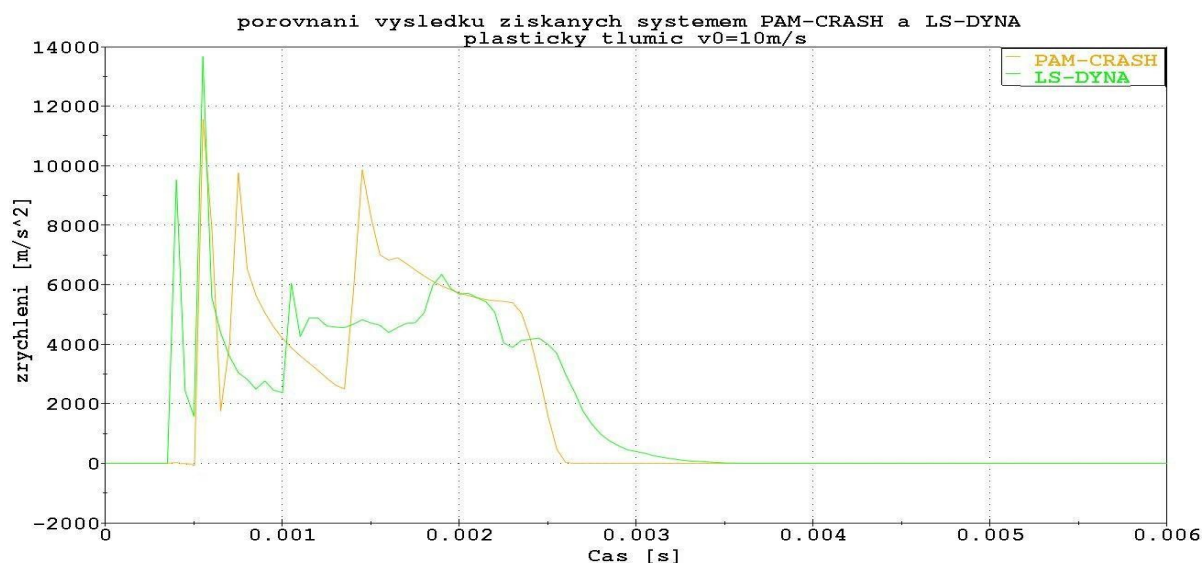


Obrázek 8.31 srovnání výsledku pro hyperelastický tlumič a počáteční rychlost 5m/s

Z obrázku 8.31 vyplývá, že průběhy zrychlení jsou podobné při výpočtovém modelování v systému PAM-CRASH a LS-DYNA. K rozdílu dochází u maxima křivky popisující průběh zrychlení, kde hodnota maximálního zrychlení v systému LS-DYNA je vyšší než v systému PAM-CRASH. Jistý podíl na tomto může mít fakt, že model materiálu použitý v systému LS-DYNA je založen na jiném konstitutivním vztahu energie napjatosti než model materiálu použitý v systému PAM-CRASH. U LS-DYNA je to model Mooney-Rivlin ve své pěti parametrické variantě a v systému PAM-CRASH je to model Ogden třetího řádu. Oba tyto modely konstitutivních vztahů byly popsány v kapitole 3.2 této práce. Posuv jednotlivých

křivek vzhledem k času je způsoben jiným nastavením parametrů kontaktu v jednotlivých systémech.

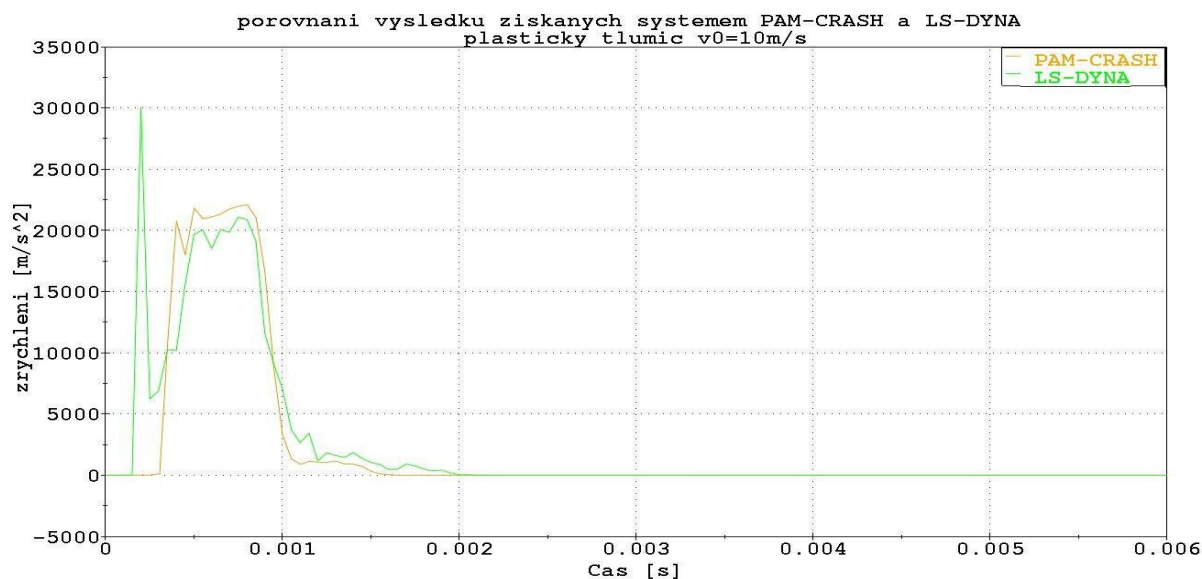
**Pro plastický tlumič a počáteční rychlost 10m/s byly získány tyto výsledky**



Obrázek 8.32 srovnání výsledku pro plastický tlumič a počáteční rychlost 10m/s

U modelu plastického tlumiče byly použity obdobné modely materiálu. Podstatné rozdíly průběhů jsou dány především nastavením kontaktů v jednotlivých systémech. Problematika kontaktu je u úlohy tohoto typu komplikovanější vzhledem k potřebě modelovat chování objektu i po ztrátě geometrické stability, kdy dochází ke kontaktu objektu se sebou samým. U systému bylo použito nastavení kontaktů blízké nastavení doporučenému. Systém LS-DYNA s tímto nastavením nepracoval korektně, bylo nutné měnit parametry kontaktu. Vzhledem tomuto faktu se autor opět přiklání k výsledkům získaným v systému PAM-CRASH.

**Pro plastický tlumič z kombinace dvou materiálů a počáteční rychlost 10m/s byly získány tyto výsledky**



Obrázek 8.32 srovnání výsledku pro kombinovaný tlumič a počáteční rychlost  $10\text{m/s}$

Výsledky pro výpočtový model tlumiče s kombinací dvou materiálů jsou srovnatelné, až na jediný podstatný rozdíl. Maximální hodnota zrychlení při prvním kontaktu tlumiče a tělesa v systému LS-DYNA je nereálně vysoká. Tato je opět způsobena zřejmě nevhodně nastavenými parametry kontaktu. Poměrně věrohodně je pak popsán průběh zrychlení v průběhu děje u obou modelů, tedy jak v systému PAM-CRASH, tak v systému LS-DYNA.



## 9 Závěr

Tato diplomová práce se věnuje výpočtovému modelování rychlých dynamických dějů u materiálů se silně nelineárními napěťově deformačními charakteristikami. Z materiálů, které se chovají jako nelineární byly pro tuto práci vybrány dvě skupiny, materiály hyperelastické a plastické, přesněji pružně plastické.

Obě tyto skupiny jsou schopny při zatížení dosahovat velkých deformací, proto byla ve druhé kapitole této práce věnována pozornost možnostem popisu stavu napjatosti a stavu deformace v bodě tělesa při velkých deformacích. Byl zde uveden přehled a stručné charakteristiky tenzorů, které se při velkých deformacích používají k popisu napěťově deformačních charakteristik.

Základním charakteristikám hyperelastických materiálů byla věnována pozornost ve třetí kapitole této práce. Byl zde mimo jiné uveden přehled a stručná charakteristika nejpoužívanějších konstitutivních modelů pro hyperelastických materiálů, pomocí kterých se vlastnosti materiálů tohoto typu modelují v systémech MKP. Charakteristikám druhé skupiny materiálů, tedy plastickým byla věnována čtvrtá kapitola.

Pátá a šestá kapitola se věnuje možnostem popisu hyperelastických a plastických materiálů v systémech MKP ANSYS, PAM-CRASH a LS-DYNA. Pro hyperelastické materiály je v této práci nastíněna teoretická podstata materiálových zkoušek, které výše uvedené MKP systémy používají pro zjištění parametrů modelu materiálu. Je zde také přehled modelů materiálů, které systémy MKP nabízí pro výpočtové modelování problémů hyperelastických materiálů. Ukázalo se, že všechny tři systémy MKP, tedy ANSYS, PAM-CRASH a LS-DYNA nabízí modely materiálů, které jsou schopny velmi dobře modelovat napěťově deformační chování hyperelastických materiálů. Správnost zadání parametrů modelu materiálu byla prokázána srovnáním výsledků simulací jednoduchých zkoušek a experimentálních dat. Některé s těchto modelů materiálu jsou schopny také modelovat časovou závislost napěťově deformačních charakteristik. Možnostem popisu chování plastických materiálů není v této práci věnována toliká pozornost jako u materiálů hyperelastických. Je uveden přehled základních materiálů pro popis materiálu s pružně plastickým chováním při zatížení. Všechny systémy nabízí několik základních modelů těchto materiálů a rovněž několik modelů schopných modelovat další, komplikovanější vlastnosti materiálů, jako například modely pro porušování, časovou závislost napěťově deformačních charakteristik. Tyto jsou však spolu s modely materiálů hyperelastických s možností zahrnutí časové závislosti napěťově deformačních charakteristik již nad rámec této zadání práce, lze je použít pro možnou návaznost v dalších pracích

Osmá kapitola je zaměřena na tvorbu výpočtových modelů jednoduchých tlumičů rázu vyrobených z hyperelastických a plastických materiálů. S využitím systémového přístupu k modelování byl sestaven systém podstatných veličin na objektu, tento byl pomocí dílčích modelů zadán do programů MKP PAM-CRASH a LS-DYNA. Program ANSYS nebyl použit, jeho použití se ukázalo jako velmi komplikované, vzhledem k velkým nelinearitám různého typu které je potřeba zahrnout při tvorbě modelu. Pomocí tohoto modelu byly modelovány



rázové děje tlumičů a to vždy pro dvě počáteční rychlosti. Z výsledků získaných pomocí těchto modelů byly získány průběhy zrychlení pohybujícího se tělesa během rázového děje. Pro jednotlivé provedení bylo uděláno srovnání, kde se podle očekávání jako nejvhodnější materiál pro tlumení rázu ukázal materiál hyperelastický, kde byla maximální hodnota zrychlení a tedy i síly, kterou působí tlumič na těleso nejnižší.

Výsledky simulací byly vzájemně porovnány také pro oba použité programy, kde se ukázal velký vliv správného nastavení parametrů kontaktů mezi tělesem a tlumičem a také mezi samotným tlumičem. Zde se ukázalo že rozdíl v průbězích zrychlení pro jinak nadefinované kontakty může způsobit chyby řádu desítek procent. Dobrá shoda zde byla pro hyperelastické materiály, problematictější se z pohledu kontaktní úlohy ukázal tenkostěnný plastický tlumič. Jedná se zde o řešení úlohy, kde dojde několikrát ke ztrátě stability. Toto je problematika, pro kterou už autorovi nezbýval prostor při tvorbě této práce a je další z možných návazností na tuto práci.

Důležitou poznámkou je, že pro chování tlumičů při rychlém dynamickém zatížení nebyly při tvorbě této práce k dispozici žádné data z experimentů, vytvořený model je tedy jen hypotetický.

Tímto závěrem se autor snažil shrnout, že podle něj bylo v této práci dosaženo všech cílů, které byly v úvodu stanoveny. Při řešení problémů se vyskytly některé další problémy, které byly nad rámec zadání a pro jejichž úplné řešení již nebyl prostor. Lze je považovat za možnou návaznost na tuto práci.

Všechny vytvořené modely včetně simulací materiálových zkoušek hyperelastických materiálů jsou součástí přílohy této práce.

## **Použitá literatura**

- [1] Přemysl Janíček: Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky, Cerm BRNO, 2007
- [2] Pavel Skácel: Výpočtové a experimentální modelování deformačně napjatostních a mezních stavů elastomeru a jejich rozhraní s tuhými materiály, disertační práce, 2004
- [3] Jan Bořkovec: Výpočtové modelování procesu dělení materiálu, disertační práce, 2008
- [4] Virtual performance solution 2008, Explicit solver reference manual, 2008, ESI group
- [5] LS-DYNA, Keyword user's manual, Version 971, 2007, LSTC
- [6] ANSYS Users manual – Hyperelasticity, Plasticity
- [7] PAM-CRASH Training, školicí material, ESI Group
- [8] Hyperelasticita, Presentace Esi group, ESI Group
- [9] Malenovský E., opory předmětu Počítačové metody mechaniky
- [10] Burša J., opory předmětu Nelineární mechanika v MKP
- [11] Petruška J., opory předmětu Nelineární mechanika v MKP
- [12] Florian Z., přednášky předmětu Přetvárné a degradační procesy
- [13] Internetové stránky [www.polymerfem.com](http://www.polymerfem.com)